

Nonlinear Control Theory
Sommersemester 2015

Fritz Colonius

23. August 2015

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	v
1 Output-Regulierung linearer Systeme	1
2 Akzessibilität für Nichtlineare Systeme	7
3 Input-to-State Stabilität	29
3.1 Definition der Input-to-State Stabilität	29
3.2 Stabilität und Vergleichsfunktionen	32
3.3 Lyapunov-Funktionen	34
3.4 ISS für Kaskaden	44
3.5 Kontroll-Lyapunovfunktionen	48
4 Feedback-Stabilisierung	55
4.1 Brocketts Bedingung	55
4.2 Beispiel: Artsteins Kreise	59
4.3 Sontags Universelle Formel	62
5 Control Sets	69

Vorwort

Dies ist das Skript der im Sommersemester 2015 am Institut für Mathematik der Universität Augsburg gehaltenen Vorlesung. Insbesondere die im Literaturverzeichnis angegebenen Quellen werden ohne weitere Kennzeichnung verwendet.

Das Ziel dieser Vorlesung ist es, eine Einführung in Probleme der Mathematischen Kontrolltheorie für nichtlineare Systeme zu geben. Im vorausgegangenen Wintersemester ist die Theorie linearer Kontrollsysteme behandelt worden. Da viele Systeme jedoch durch nichtlineare Differentialgleichungen beschrieben werden, haben wir die Beschränkung auf lineare Systeme damit begründet, dass man zunächst in einem Gleichgewicht (dem Arbeitspunkt) linearisiert und dann die Eigenschaften des linearen Kontrollsystems diskutiert und hierfür einen Regler entwirft. Dabei kann man zum Beispiel die Nichtlinearitäten als Unsicherheiten im linearen System auffassen, die durch Methoden der robusten Regelung einbezogen werden.

Natürgemäß können lineare Modelle nichtlineare Phänomene nicht angemessen wiedergeben. Insbesondere sind sie nur bei hinreichend kleinen Abweichungen von Gleichgewicht valide. Will man also globalere Aussagen gewinnen und vielleicht sogar Nichtlinearitäten für die Regelung ausnutzen, so muss man auch nichtlineare Kontrollsysteme analysieren. Ein weiterer Grund ist, dass aus mathematischer Sicht nichtlineare Kontrollsysteme sehr interessante Studienobjekte liefern.

Standardreferenzen für nichtlineare Kontrolltheorie sind neben Sontag [12] die Bücher Isidori [5] und Nijmeijer and van der Schaft [10]. Weitere Referenzen werden im Lauf der Vorlesung angegeben.

Kapitel 1

Output-Regulierung linearer Systeme

In diesem Kapitel werden einige Ergänzungen zur linearen Kontrolltheorie geliefert, das Servoproblem sowie das Problem, Outputs zu stabilisieren, wenn Störungen auf das System wirken. Letzteres Problem haben wir im vorangegangenen Semester im Rahmen des Disturbance Decoupling Problems behandelt. Dabei wurden die Störungen, ohne weitere Struktur, als beliebige stetige Funktionen angenommen. Jetzt werden wir wesentlich stärkere Annahmen an die Struktur der Störungen machen.

Das **Servoproblem** besteht darin, ein vorgegebenes Referenzsignal zu verfolgen. Dabei soll dieses Signal Lösung einer Differentialgleichung sein, also von einem sogenannten Exosystem erzeugt werden.

Bei der **Output-Regulierung** soll der Output gegen Null konvergieren, unabhängig von Störungen, die auf das System wirken. Auch hier wird angenommen, dass die Störungen von einer Differentialgleichung erzeugt werden. Natürlich sind auch Kombinationen dieser beiden Probleme möglich. Bevor wir zu einer Formalisierung dieser Probleme (im Rahmen der linearen Kontrolltheorie) kommen, soll das folgende einfache Beispiel zur Illustration dienen.

Beispiel 1.1 *Gegeben sei ein skalares Kontrollsystem, auf das konstante Störungen wirken. Es soll eine Sinus-Funktion nachgefahren werden. Das System habe die Form*

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + b_1u(t) + a_{14}d(t), z_1(t) = x_1(t)$$

mit Konstanten $a_{11}, a_{14}, b_1 \in \mathbb{R}$ und Störungen $d(t)$. Das Referenzsignal sei $r(t) = \sin \omega t$ für bekanntes $\omega > 0$. Gewünscht ist, dass für den Tracking-Fehler $z_1(t) - r(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$ gilt. Das Referenzsignal ist die Lösung $x_2(t)$ der Differentialgleichung

$$\dot{x}_2 = x_3, \dot{x}_3 = -\omega^2 x_2$$

mit Anfangsbedingung $x_2(0) = 0, x_3(0) = \omega$. Die Störungen $d(t)$ sollen konstant sein, mit unbekannter Größe. Das heißt, sie werden erzeugt von der Differentialgleichung

$$\dot{x}_4 = 0, \text{ also } d(t) = x_4(t).$$

Dann bezeichnet man das System mit Zustandsvariablen (x_2, x_3, x_4) als Exosystem und das Gesamtsystem ist

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

mit zu regelndem Output

$$z(t) = [1, -1, 0, 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

Dazu kann eventuell ein gemessener Output $y(t)$ kommen, der für die Regelung verwendet werden kann.

Ziele sind

- **Output-Regulierung**, also $z(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$ (im Weiteren sagen wir auch einfach, dass $z(t)$ stabil sein soll);
- **Interne Stabilität**, das heißt, für den Anfangswert 0 des Exosystems und beliebige Anfangswerte des Regelsystems soll Stabilität gelten.

Wir verallgemeinern und formalisieren das Problem folgendermaßen.

Das **Exosystem** Σ_1 sei gegeben durch eine Differentialgleichung

$$\dot{x}_1(t) = A_1 x_1(t) \text{ in } \mathcal{X}_1. \quad (1.1)$$

Das Regelsystem (die Strecke) Σ_2 sei gegeben durch

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) &= A_3 x_1(t) + A_2 x_2(t) + B_2 u(t) \text{ in } \mathcal{X}_2 \\ y(t) &= C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t), \\ z(t) &= D_1 x_1(t) + D_2 x_2(t) + E u(t); \end{aligned} \quad (1.2)$$

dabei sind $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{Y}$, und \mathcal{Z} endlich-dimensionale Vektorräume mit $n_1 = \dim \mathcal{X}_1$, $n_2 = \dim \mathcal{X}_2$ und $\dim \mathcal{Z} = r$. Entsprechend sind A_i, C_i und D_i lineare Abbildungen zwischen diesen Räumen. Ferner bezeichnen wir $y(t) \in \mathcal{Y}$ als gemessenen Output und $z(t) \in \mathcal{Z}$ als zu regelnden Output.

Das Gesamtsystem Σ auf $\mathcal{X} := \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ können wir mit

$$A := \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_3 & A_2 \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad C = [C_1, C_2], \quad D := [D_1, D_2] \quad (1.3)$$

auch kurz schreiben als

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx, \quad z = Dx + Eu.$$

Zunächst betrachten wir das System mit $u(t) \equiv 0$, also ohne Kontrolle.

Das System Σ heißt dann

- endostabil, falls Σ_2 stabil ist, also für $x_1(0) = 0$ und $x_2(0)$ beliebig, ist $x_2(t)$ stabil;
- Output-reguliert, falls $z(t)$ stabil ist für alle Anfangswerte von Σ .

Offenbar ist Σ genau dann endostabil, wenn für die Eigenwerte $\text{spec}(A_2) \subset \mathbb{C}_- := \{z \in \mathbb{C}, \text{Re } z < 0\}$ gilt. Für die Eigenschaft, Output-reguliert zu sein, liefert das folgende Lemma eine Charakterisierung.

Lemma 1.2 *Gelte $\text{spec}(A_2) \subset \mathbb{C}_-$. Das System mit $u(t) \equiv 0$ ist Output-reguliert, falls eine lineare Abbildung $T : \mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{X}_2$ existiert mit*

$$TA_1 - A_2T = A_3 \text{ und } D_1 + D_2T = 0. \quad (1.4)$$

Ist A_1 antistabil, das heißt, $\text{spec}(A_1) \cap \mathbb{C}_- = \emptyset$, so ist dies auch notwendig.

Beweis. Betrachte $v := x_2 - Tx_1$ (für beliebige Lösungen x_1 und x_2). Dann gilt

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \dot{x}_2 - T\dot{x}_1 = A_3x_1 + A_2x_2 - TA_1x_1 = A_2v + (A_2T - TA_1 + A_3)x_1, \\ z &= D_1x_1 + D_2x_2 = D_2v + (D_1 + D_2T)x_1. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Ist T Lösung von (1.4), so reduziert sich dies auf

$$\dot{v} = A_2v, \quad z = D_2v.$$

Weil $v(t)$ stabil ist, folgt, dass $z(t)$ stabil ist, das System also Output-reguliert ist.

Ist A_1 antistabil und das System Output-reguliert, so folgt

$$\text{spec}(A_1) \cap \text{spec}(A_2) = \emptyset.$$

Dann besagt der Satz von Sylvester (siehe z.B. Trentelman, Stoorvogel, Hautus [14, Theorem 9.6]) gerade, dass die erste Gleichung in (1.4) für jedes A_3 (genau) eine Lösung T besitzt. Um zu zeigen, dass auch die zweite Gleichung in (1.4) erfüllt ist, betrachte (1.5). Weil $v(t)$ und $z(t)$ stabil sind, ist auch $(D_1 + D_2T)x_1(t)$ stabil. Weil A_1 antistabil ist, folgt, dass $D_1 + D_2T = 0$ sein muss. ■

Wenn die Bedingungen von Lemma 1.2 nicht erfüllt sind, soll ein Regler konstruiert werden, so dass das closed-loop-System (der geschlossene Regelkreis) die Bedingungen erfüllt. Dafür betrachten wir Regler Γ der Form

$$\dot{w}(t) = Kw(t) + Ly(t), \quad u(t) = Mw(t) + Ny(t), \quad (1.6)$$

mit geeigneten linearen Abbildungen K, L, M, N . Der geschlossene Regelkreis soll eine (Kaskaden-)Verknüpfung Σ_{cl} des Exosystems Σ_1 und $\Sigma_{2,cl}$ sein, wobei $\Sigma_{2,cl}$ die Feedback-Verknüpfung von Σ_2 und Γ ist, gegeben durch $x_{2e} := [x_2, w]^T$ mit

$$\begin{aligned} \dot{x}_{2e}(t) &= A_{2e}x_{2e}(t) + A_{3e}x_1(t), \\ z(t) &= D_{1e}x_1(t) + D_{2e}x_{2e}(t), \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} A_{2e} &:= \begin{bmatrix} A_2 + B_2NC_2 & B_2M \\ LC_2 & K \end{bmatrix}, \quad A_{3e} := \begin{bmatrix} A_3 + B_2NC_1 \\ LC_1 \end{bmatrix}, \\ D_{2e} &:= [D_2 + ENC_2, EM], \quad D_{1e} := D_1 + ENC_1. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Wir nennen Γ einen Regulator, wenn Σ_{cl} endostabil und Output-reguliert ist. Nach Lemma 1.2 existiert solch ein Regulator $\Gamma = (K, L, M, N)$, wenn A_{2e} stabil ist und die Gleichungen

$$T_eA_1 - A_{2e}T_e = A_{3e}, \quad D_{2e}T_e + D_{1e} = 0 \quad (1.8)$$

eine Lösung T_e besitzen. Ist A_1 antistabil, so ist dies auch notwendig. Im Folgenden definieren wir A, B und C analog zu (1.3), Σ_2 durch $\Sigma_{2,cl}$ ersetzt wird (also A_2 durch A_{2e} etc.).

Theorem 1.3 *Es sei (A_2, B_2) stabilisierbar und (C, A) sei asymptotisch beobachtbar (auch entdeckbar genannt). Dann existiert ein Regulator, falls die Gleichungen*

$$TA_1 - A_2T - B_2V = A_3, \quad D_1 + D_2T + EV = 0 \quad (1.9)$$

eine Lösung (T, V) besitzen.

Genauer: Seien $G : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ mit $\text{spec}(A + GC) \subset \mathbb{C}_-$ und $F_2 : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}$ mit $\text{spec}(A_2 + B_2F_2) \subset \mathbb{C}_-$ und $F_1 := -F_2T + V$, $F := (F_1, F_2)$, wobei (T, V) eine Lösung von (1.9) ist. Dann ist ein Regulator gegeben durch

$$\dot{w}(t) = (A + BF + GC)w(t) - Gy(t), \quad u(t) = Fw(t). \quad (1.10)$$

Beweis. Die folgende Überlegung zeigt, wie man auf die Gleichung (1.9) kommt. Sei A_1 antistabil und es existiere ein Regulator. Er erfüllt dann (1.8) für ein $T_e = \begin{bmatrix} T \\ U \end{bmatrix}$. Einsetzen von (1.7) in (1.8) liefert für den oberen Block der ersten Gleichung

$$TA_1 - (A_2 + B_2NC_2)T - B_2MU = A_3 + B_2NC_1$$

und die zweite Gleichung ist

$$D_1 + (D_2 + ENC_2)T + EMU + ENC_1 = 0.$$

Dies zeigt, dass $(T, V) = (T, NC_2T + MU + NC_1)$ eine Lösung von (1.9) ist.

Sei jetzt (T, V) eine Lösung von (1.9). Definiere einen Regler Γ durch

$$(K, L, M, N) := (A + GC + BF, -G, F, 0),$$

also durch (1.10), wobei F und G die Bedingungen von Theorem 1.3 erfüllen.

Wir behaupten, dass Γ ein Regulator ist.

Um Endostabilität zu zeigen, definiere $r := w - x$ und beachte

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + BFw(t) = (A + BF)x(t) + BFw(t) - BFx(t) \\ &= (A + BF)x(t) + BFr(t) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \dot{r}(t) &= \dot{w}(t) - \dot{x}(t) = (A + BF + GC)w(t) - GCx(t) - Ax(t) - BFw(t) \\ &= (A + GC)r(t). \end{aligned}$$

Nach Wahl von G ist $r(t)$ stabil. Ist $x_1(0) = 0$, also $x_1(t) \equiv 0$, so reduziert sich die erste Gleichung auf

$$\dot{x}_2(t) = (A_2 + B_2F_2)x_2(t) + B_2Fr(t).$$

Es folgt (**Übungsaufgabe!**), dass auch $x_2(t)$ stabil ist.

Um zu zeigen, dass das System Output-reguliert ist, definiere $U := \begin{bmatrix} I \\ T \end{bmatrix}$.

Dann erfüllt $T_e := \begin{bmatrix} T \\ U \end{bmatrix}$ die beiden Gleichungen in (1.8). In der Tat, Einsetzen und (1.7) in (1.8) liefert, dass für **die erste Gleichung**

$$\begin{bmatrix} T \\ U \end{bmatrix} A_1 - \begin{bmatrix} A_2 + B_2NC_2 & B_2M \\ -GC_2 & A + BF + GC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_3 \\ -GC_1 \end{bmatrix}$$

gelten muss (beachte $L = -G, K = A + BF + GC, N = 0$ und $M = F$).

Aus $F_1 = -F_2T + V$ folgt $FU = (F_1, F_2) \begin{bmatrix} I \\ T \end{bmatrix} = F_1 + F_2T = V$. Daher ist $B_2MU = B_2FU = B_2V$ und die obere Block-Gleichung gerade die erste Gleichung in (1.9), also

$$TA_1 - A_2T - B_2V = A_3.$$

Die untere Block-Gleichung ist

$$UA_1 + GC_2T - (A + BF + GC)U = -GC_1,$$

also

$$G(C_1 + C_2T - CU) + UA_1 - AU - BV = 0.$$

Der Ausdruck in Klammern ist gleich 0, nach Definition von U und $C = (C_1, C_2)$.

Die restlichen Terme werden nach Definition von $A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_3 & A_2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix}$ zerlegt in

$$\begin{bmatrix} I \\ T \end{bmatrix} A_1 - \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_3 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} V = \begin{bmatrix} A_1 - A_1 \\ TA_1 - A_3 - A_2T - B_2V \end{bmatrix} = 0$$

wegen der ersten Gleichung in (1.9).

Es bleibt die zweite Gleichung in (1.8) nachzuweisen. Sie ist wegen $D_{2e} := (D_2 + ENC_2, EM), D_{1e} := D_1 + ENC_1$ und $N = 0, M = F$

$$\begin{aligned} D_{2e}T_e + D_{1e} &= [D_2 + ENC_2, EM] \begin{bmatrix} T \\ U \end{bmatrix} + D_1 + ENC_1 \\ &= D_1 + D_2T + EFU \\ &= D_1 + D_2T + EV = 0. \end{aligned}$$

Dies gilt wegen der zweiten Gleichung in (1.9). ■

Bemerkung 1.4 Die Bedingung an Entdeckbarkeit des Gesamtsystems Σ kann abgeschwächt werden zu Entdeckbarkeit des Systems Σ_2 ; siehe Trentelman, Stoorvogel, Hautus [14, Section 9.1].

Bemerkung 1.5 Der Regulator Γ ist im Allgemeinen selber nicht stabil. Unter den Voraussetzungen von Satz 1.3 muss nicht gelten, dass Matrizen F und G existieren, so dass nicht nur $A + BF$ und $A + GC$ stabil sind, sondern auch $A + BF + GC$. **Übungsaufgabe!**

Ein mathematisches Problem wird häufig wohlgestellt genannt, wenn es auch bei kleinen Störungen in den Parametern des Problems lösbar bleibt. Dies ist wichtig, wenn die Parameter durch Messungen bestimmt werden müssen. Man kann zeigen, dass dies für das Regulator-Problem gilt.

Kapitel 2

Akzessibilität für Nichtlineare Systeme

In diesem Kapitel diskutieren wir allgemeine nichtlineare Kontrollsysteme. Die Kontrollierbarkeitseigenschaften solcher Systeme sind wesentlich komplizierter als im linearen Fall. Deswegen beschränken wir uns zunächst auf die Analyse von lokaler Akzessibilität, die im vorangegangenen Semester für lineare Kontrollsysteme in Abschnitt 2.3 diskutiert worden ist.

Wir werden eine hinreichende Bedingung für lokale Akzessibilität herleiten, die im reell-analytischen Fall auch notwendig ist. Im C^∞ -Fall ist sie nur „fast“ hinreichend.

Zunächst beschreiben wir die allgemeine Klasse von Kontrollsystemen, die wir betrachten werden.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \\ u &\in \mathcal{U} = \{u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m, u(t) \in U \text{ für } t \in \mathbb{R}, \text{ lokal essentiell beschränkt}\}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

wobei $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist und „lokal essentiell beschränkt“ bedeutet: (Lebesgue) messbar und auf jedem beschränkten Intervall außerhalb einer Nullmenge beschränkt. Manchmal benutzen wir für die Menge der involvierten Vektorfelder (zu konstantem u) die Notation

$$F = \{f(\cdot, u), u \in U\}.$$

Wir nehmen an, dass die Vektorfelder in F stetig differenzierbar sind und dass der Kontrollwertebereich $U \subset \mathbb{R}^m$ nichtleer ist und dass für jeden Anfangswert $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und jede Kontrollfunktion $u \in \mathcal{U}$ eine eindeutige (absolut-stetige) Lösung von (2.1) in folgendem Sinn existiert:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(\tau), u(\tau)) \, d\tau \quad (2.2)$$

Diese Lösung wird mit $\varphi(t, x, u)$, $t \in \mathbb{R}$, bezeichnet und erfüllt $\varphi(0, x, u) = x$. Meist reicht es, stückweise konstante Kontrollfunktionen zu betrachten, also

$$\mathcal{U} = \{u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m, u(t) \in U \text{ für alle } t \in \mathbb{R}, \text{ stückweise konstant}\}.$$

Dann sind die zugehörigen Trajektorien $\varphi(\cdot, x, u)$ stückweise C^1 -Funktionen.

Der folgende Satz von Carathéodory zeigt, dass die Wahl messbarer Kontrollfunktionen einen sinnvollen Lösungsbegriff für (2.2) liefert.

Theorem 2.1 *Betrachte ein Kontrollsystem der Form (2.1) mit folgenden Eigenschaften:*

(i) *Der Raum \mathcal{U} der Kontrollfunktionen ist gegeben wie in (2.1).*

(ii) *Die Abbildung $f : \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist stetig.*

(iii) *Für jedes $R > 0$ existiert eine Konstante $L_R > 0$, so dass die Abschätzung*

$$\|f(x_1, u) - f(x_2, u)\| \leq L_R \|x_1 - x_2\|$$

für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ und alle $u \in U$ mit $\|x_1\|, \|x_2\|, \|u\| < R$ erfüllt ist.

Dann gibt es für jeden Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und jede Kontrollfunktion $u \in \mathcal{U}$ ein (maximales) offenes Intervall I mit $0 \in I$ und genau eine absolut stetige Funktion $\varphi(t, x_0, u) = x(t)$, die die Integralgleichung

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(\tau), u(\tau)) d\tau$$

für alle $t \in I$ erfüllt.

Die folgende Beobachtung rechtfertigt diese Definition: Da $\varphi(t, x_0, u)$ absolut stetig ist, ist diese Funktion für fast alle $t \in I$ nach t differenzierbar. Insbesondere folgt also aus dem Satz, dass $\varphi(t, x_0, u)$ die Differentialgleichung für fast alle $t \in I$ erfüllt, d.h. es gilt $\frac{d}{dt}\varphi(t, x_0, u) = f(\varphi(t, x_0, u), u(t))$ für fast alle $t \in I$.

Bemerkung 2.2 *Im Weiteren nehmen wir stets an, dass die Voraussetzungen (i)–(iii) von Satz 2.1 erfüllt sind, werden dies aber nur in wichtigen Sätzen explizit formulieren.*

Der Beweis von Satz 2.1 (auf den wir aus Zeitgründen nicht näher eingehen) verläuft ähnlich wie der Beweis des entsprechenden Satzes für stetige gewöhnliche Differentialgleichungen, d.h. mit dem Banach'schen Fixpunktsatz angewendet auf einen passenden Funktionenraum. Er findet sich zusammen mit einer Einführung in die zugrundeliegende Lebesgue-Maßtheorie z.B. in dem Buch *Mathematical Control Theory* von E.D. Sontag [12, Anhang C].

Die Definition von Erreichbarkeitsmengen, zum Beispiel,

$$\mathcal{O}_T^+(x) := \{\varphi(T, x, u) \mid u \in \mathcal{U}\}, T > 0, x \in \mathbb{R}^n$$

und lokaler Akzessibilität (und von Kontrollmengen) sind analog wie im linearen Fall.

Definition 2.3 *Das System (2.1) ist lokal akzessibel in $x \in \mathbb{R}^n$, falls für alle $T > 0$*

$$\text{int}\mathcal{O}_{\leq T}^+(x) = \text{int}\{\varphi(t, x, u), 0 \leq t \leq T \text{ und } u \in \mathcal{U}\} \neq \emptyset \text{ und}$$

$$\text{int}\mathcal{O}_{\leq T}^-(x) = \text{int}\{y \in \mathbb{R}^n, \varphi(t, y, u) = x, 0 \leq t \leq T \text{ und } u \in \mathcal{U}\} \neq \emptyset.$$

Das folgende Beispiel zeigt, dass bei Linearisierung wesentliche Information verloren gehen kann.

Beispiel 2.4 (Das Einrad, the unicycle) Betrachte in \mathbb{R}^2 ein Einrad, das beschrieben wird durch die Koordinaten in \mathbb{R}^2 und den Winkel zur x_1 -Achse, also mit Zustand $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2 \times S^1$. Die Steuerung sind die Vorwärtsgeschwindigkeit u_1 und die Drehgeschwindigkeit u_2 . Man erhält die Differentialgleichung

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= u_1 \cos x_3, \\ \dot{x}_2 &= u_1 \sin x_3, \\ \dot{x}_3 &= u_2.\end{aligned}$$

Also

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \cos x_3 \\ \sin x_3 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2.$$

Das im Gleichgewicht $x = (0, 0, 0)^T$, $u = (0, 0)$ linearisierte System ist

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2.$$

Wegen $\dot{x}_2 = 0$ kann man diese Zustandskoordinate nicht verändern, das System bleibt auf der Linie $x_2 = 0$ in \mathbb{R}^2 . Wir erhalten für das Einrad

$$\dot{x} = g_1(x)u_1 + g_2(x)u_2$$

mit den Vektorfeldern

$$g_1(x) = \begin{bmatrix} \cos x_3 \\ \sin x_3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g_2(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

und den zugehörigen Flüssen $\varphi_1(t, x)$ und $\varphi_2(t, x)$, $t \geq 0$. Zusätzlich zu den entsprechenden beiden Richtungen gibt noch eine dritte, unabhängige Bewegungsrichtung! Sie erhält man durch Vorwärts- und Rückwärts-Rangieren. Betrachte

$$\psi(t, x) := \varphi_2(-t, \varphi_1(-t, \varphi_2(t, \varphi_1(t, x))))).$$

Welche Richtung gehört dazu? Für Taylorentwicklung in $t = 0$ berechnet man bei Start in $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)^T$ mit $u = (1, 0)$, dann $u = (0, 1)$,

$$\varphi_1(t, 0) = \begin{bmatrix} x_1^0 + t \cos x_3^0 \\ x_2^0 + t \sin x_3^0 \\ x_3^0 \end{bmatrix}, \quad \varphi_2(t, \varphi_1(t, x)) = \begin{bmatrix} x_1^0 + t \cos x_3^0 \\ x_2^0 + t \sin x_3^0 \\ x_3^0 + t \end{bmatrix},$$

weiter mit $u = (-1, 0)$

$$\varphi_1(-t, \varphi_2(t, \varphi_1(t, x))) = \begin{bmatrix} x_1^0 + t \cos x_3^0 - t \cos(x_3^0 + t) \\ x_2^0 + t \sin x_3^0 - t \sin(x_3^0 + t) \\ x_3^0 + t \end{bmatrix}.$$

Wir erhalten mit $u = (0, -1)$

$$\varphi_2(-t, \varphi_1(-t, \varphi_2(t, \varphi_1(t, x)))) = \begin{bmatrix} x_1^0 + t \cos x_3^0 - t \cos(x_3^0 + t) \\ x_2^0 + t \sin x_3^0 - t \sin(x_3^0 + t) \\ x_3^0 + t - t \end{bmatrix}.$$

Taylorentwicklung ($o(t^2)$ = Terme höherer Ordnung) zeigt

$$\begin{aligned}\sin(x_3^0 + t) &= \sin x_3^0 + t \cos x_3^0 + o(t^2), \\ \cos(x_3^0 + t) &= \cos x_3^0 - t \sin x_3^0 + o(t^2).\end{aligned}$$

Daher

$$\varphi_2(-t, \varphi_1(-t, \varphi_2(t, \varphi_1(t, x)))) = x^0 + t^2 \begin{bmatrix} -\sin x_3^0 \\ \cos x_3^0 \\ 0 \end{bmatrix} + o(t^2).$$

Also erhält man die Richtung $g_3(x) = \begin{bmatrix} \sin x_3 \\ -\cos x_3 \\ 0 \end{bmatrix}$, die aber nicht linear, sondern im t^2 -Term auftaucht.

Wir benötigen eine Verallgemeinerung von Kalmans Rang-Bedingung. Wir folgen dabei Sontag [12]. Es wird sich herausstellen, dass diese Verallgemeinerung auch für unbeschränkte Kontrollen nicht die vollständige Kontrollierbarkeit liefert, sondern nur lokale Akzessibilität. Es gibt - trotz vieler Einzelresultate - keine allgemeinen Kriterien für vollständige Kontrollierbarkeit nichtlinearer Systeme.

Die folgenden Beispiele illustrieren den Unterschied zwischen Kontrollierbarkeit und lokaler Akzessibilität.

Beispiel 2.5 Betrachte in \mathbb{R}^2

$$\dot{x}_1 = u(t), \quad \dot{x}_2 = x_1^2.$$

Das System ist für keinen Kontrollwertebereich U kontrollierbar, weil der positive Orbit $\mathcal{O}^+(0, 0)$ in $\{(x_1, x_2), x_2 > 0\}$ enthalten ist. Das System ist aber lokal akzessibel: Wähle für $\tau > 0$

$$u_\tau(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \in [0, \tau] \\ 0 & \text{für } t > \tau \end{cases}.$$

Daher enthält $\mathcal{O}^+(0, 0)$ eine offene Menge.

Beispiel 2.6 Betrachte in \mathbb{R}^2

$$\dot{x}_1 = u_1(t), \quad \dot{x}_2 = u_2(t)f(x_1) \text{ mit } (u_1(t), u_2(t)) \in U,$$

wobei $f(x_1) = 0$ für $x_1 \leq 0$ und $f(x_1) > 0$ für $x_1 > 0$ gelten soll; ferner sei $0 \in \text{int}U \subset \mathbb{R}^2$. Dieses System ist kontrollierbar in \mathbb{R}^2 , aber nicht lokal akzessibel für (x_1, x_2) mit $x_1 < 0$.

Beispiel 2.5 deutet bereits an, wie man eine hinreichende Bedingung für lokale Akzessibilität in $y \in \mathbb{R}^n$ herleiten kann. Wähle Kontrollwerte $u^1, \dots, u^n \in U$ und betrachte

$$\dot{x}(t) = f^j(x(t)) := f(x(t), u^j), \quad x(0) = y.$$

Bezeichne die Lösung mit $e^{tf^j}y = \varphi(t, y, u^j)$ (diese Bezeichnung erinnert an die Matrix-Exponentialfunktion, die Ähnlichkeit ist aber nur formal). Betrachte dann für $T > 0$ die Abbildung

$$[0, T]^n \rightarrow \mathbb{R}^n, (t^1, \dots, t^n) \mapsto e^{t^n f^n} \circ \dots \circ e^{t^1 f^1} y.$$

Ist diese Abbildung stetig differenzierbar und hat die Ableitung vollen Rang in (t^1, \dots, t^n) , so folgt aus dem Inversen-Funktionen-Theorem, dass eine Umgebung von $e^{t^n f^n} \circ \dots \circ e^{t^1 f^1} y$ von y erreichbar ist. Zur Analyse der Ableitung dieser Funktion und zur Formulierung von Kreners Theorem sind einige Vorbereitungen nötig, insbesondere Lie-Klammern von Vektorfeldern.

Es seien f und g glatte (C^∞ -)Vektorfeldern, definiert auf einer offenen Menge $O \subset \mathbb{R}^n$. Das Vektorfeld $[f, g]$ auf O ist definiert durch

$$[f, g](x) = \frac{\partial}{\partial x} g(x) f(x) - \frac{\partial}{\partial x} f(x) g(x),$$

wobei $\frac{\partial}{\partial x} g(x)$ bzw. $\frac{\partial}{\partial x} f(x)$ die jeweiligen Jacobi-Matrizen bezeichnet. Bei genügender Glattheit kann man auf die offensichtliche Weise auch iterierte Lie-Klammern definieren, also zum Beispiel für Vektorfeldern f, g und h

$$[f, [g, h]].$$

Ferner ist

$$[f, g] = -[g, f] \text{ und } [f, f] = 0.$$

Man beachte, dass die Lie-Klammer offenbar linear in jedem Argument ist, also

$$[f, g + h] = [f, g] + [f, h].$$

Für eine Menge F von glatten Vektorfeldern ist die von F erzeugte Lie-Algebra $\mathcal{L}(F)$ der kleinste lineare Raum von Vektorfeldern, der gegenüber Lie-Klammer-Bildung abgeschlossen ist, also

$$[f, g] \in \mathcal{L}(F) \text{ für alle } f, g \in \mathcal{L}(F).$$

Die Berechnung von iterierten Lie-Klammern per Hand ist aufwändig und fehleranfällig, aber im Prinzip immer durchführbar. Allerdings sei betont, dass Lie-Algebren, auch wenn sie von endlich vielen Vektorfeldern erzeugt werden, im Allgemeinen keine endlich-dimensionalen Vektorräume bilden. Für eine Lie-Algebra \mathcal{L} (einen linearen Raum von Vektorfeldern, der unter Lie-Klammern abgeschlossen ist) sei

$$\Delta_{\mathcal{L}}(x) := \{y \in \mathbb{R}^n, \text{ es gibt } f \in \mathcal{L} \text{ mit } y = f(x)\}.$$

Wir nennen $\Delta_{\mathcal{L}}(x)$, $x \in O$, auch die von \mathcal{L} erzeugte Distribution (von Unterräumen im Tangentialbündel).

Der folgende Satz von A. Krener gibt ein hinreichendes Kriterium für lokale Akzessibilität an.

Theorem 2.7 *Für das Kontrollsystem (2.1) in \mathbb{R}^n mit Vektorfeldern F , gelte die folgende **Akzessibilitäts-Rangbedingung (ARC)** in $x \in \mathbb{R}^n$:*

$$\dim \Delta_{\mathcal{L}(F)}(x) = n. \tag{2.3}$$

Dann hat für jede Umgebung N von x und jedes $T > 0$ die Menge

$$\{\varphi(t, x, u) \mid 0 \leq t \leq T, u \in \mathcal{U} \text{ und } \varphi(\tau, x, u) \in N \text{ für } t \in [0, t]\}$$

nichtleeres Inneres. Insbesondere ist das System lokal akzessibel in x , also

$$\text{int}\mathcal{O}_{\leq T}^{\pm}(x) \neq \emptyset \text{ für alle } T > 0.$$

Bemerkung 2.8 Offenbar ist die obige Bedingung äquivalent zu $\Delta_{\mathcal{L}(F)}(x) = \mathbb{R}^n$. Man sagt auch, dass die Distribution Δ in x den Rang n hat, also $\text{rang } \Delta(x) = n$.

Bemerkung 2.9 Ist das System reell-analytisch (d.h. die rechte Seite ist in eine konvergente Potenzreihe entwickelbar) oder ist $\dim \Delta_{\mathcal{L}(F)}(x)$ konstant für $x \in \mathbb{R}^n$, so gilt auch die Umkehrung. Im C^{∞} -Fall folgt aus der lokalen Akzessibilität nur, dass die Rang-Bedingung auf einer offenen und dichten Teilmenge gilt.

Bevor wir uns dem Beweis zuwenden, illustrieren wir die Bedeutung dieses Resultats. Für lineare Kontrollsysteme mit unbeschränkten Kontrollen hängt die Bedingung (2.3) eng mit der Kalman-Bedingung zusammen.

Proposition 2.10 Für $\dot{x} = Ax + Bu$ in \mathbb{R}^n gilt (2.3) in jedem $x \in \mathbb{R}^n$ genau dann, wenn

$$\text{rang}[B, AB, \dots, A^{n-1}B] = n.$$

Beweis. Hier ist $F = \{Ax + Bu, u \in \mathbb{R}^m\}$. Für $u = 0$ erhält man das Vektorfeld Ax . Wegen der Linearität ist für $u \in \mathbb{R}^m$

$$[Ax, Ax + Bu] = [Ax, Ax] + [Ax, Bu] = [Ax, Bu].$$

Beachte nun, dass Bu ein konstantes Vektorfeld ist, wähle u als einen kanonischen Basisvektor e_i in \mathbb{R}^m , und bezeichne die i -te Spalte von B mit b_i , also $b_i = Be_i$. Dann folgt, weil $\mathcal{L}(F)$ ein linearer Raum ist,

$$b_i = (Ax + Be_i) - Ax \in \mathcal{L}(F).$$

Ferner berechnet man

$$[Ax, Be_i] = 0Ax - AB e_i = Ab_i \in \mathcal{L}(F).$$

Entsprechend ist

$$[Ax, [Ax, Be_i]] = A^2 b_i.$$

Man erhält schließlich, dass $\Delta_{\mathcal{L}(F)}(x)$ alle Vektorfelder

$$Ax, b_1, \dots, b_m, Ab_1, \dots, Ab_m, \dots, A^{n-1}b_1, \dots, A^{n-1}b_m$$

enthält. Gilt also das Kalman-Kriterium, so folgt (ARC).

Für die Umkehrung beachte, dass bei Hinzunahme von weiteren Lie-Klammern $A^k b_i, k \geq n$ der davon aufgespannte Unterraum nicht mehr wächst, wegen des Satz von Cayley-Hamilton. Gilt also (ARC) in $x = 0$, so folgt die Kalman-Bedingung. ■

Für $x \neq 0$ ist die Bedingung (2.3) offenbar schwächer als die Kalman-Bedingung, weil auch das Vektorfeld Ax hinzugenommen wird.

Eine wichtige Klasse von Kontrollsystemen sind bilineare Kontrollsysteme in \mathbb{R}^n gegeben durch

$$\dot{x} = \left[A_0 + \sum_{i=1}^m u_i(t) A_i \right] x(t) = A(u(t))x(t), \quad (u_i(t)) \in U,$$

mit $n \times n$ Matrizen A_0, A_1, \dots, A_m und $U \subset \mathbb{R}^m$.

Ein Beispiel liefert der Lineare Oszillator mit gesteuerter Rückstellkraft,

$$\ddot{x} + \dot{x} + (1 + u(t))x = 0.$$

Beachte, das für bilineare Kontrollsysteme die Lie-Klammer durch den Kommutator von Matrizen gegeben ist:

$$[A(u)x, A(v)x] = (A(v)A(u) - A(u)A(v))x = [A(u)A(v) - A(v)A(u)]x.$$

Man kann dies auch als Kontrollsystem auf dem Raum $M = Gl(n, \mathbb{R})$ der invertierbaren $n \times n$ Matrizen auffassen oder auf der Untergruppe, die durch Multiplikation der Einheitsmatrix mit den entsprechenden Fundamental-Matrizen entsteht. Es entsteht also ein Kontrollsystem auf dieser (zusammenhängenden) Lie-Untergruppe \mathcal{G} (mit rechts-invarianten Vektorfeldern). Es stellt sich heraus, das die Akzessibilitäts-Rangbedingung (2.3) für das System in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ genau dann gilt, wenn sie für das System auf \mathcal{G} gilt. Allgemeiner kann man Kontrolltheorie für Systeme auf Liegruppen betreiben; hierzu gibt es eine gut ausgearbeitete Theorie (siehe z.B. die Monographie von V. Jurdjevic [7]).

Für den Beweis von Theorem 2.7 benötigen wir einige Vorbereitungen. Dazu diskutieren wir zunächst, wie das Umschalten zwischen Vektorfeldern zu konstanten Kontrollen neue Richtungen generieren kann. Wir hatten den Fluss zu einem Vektorfeld f auch mit

$$e^{tf}x = \varphi(t, x)$$

bezeichnet. Dann ist die Komposition zweier solcher Flüsse, die zu konstanten Kontrollen auf $[0, t_1]$ und $(t_1, t_2]$ gehören, gegeben durch

$$e^{t_2g}e^{t_1f}, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Im Allgemeinen ist

$$e^{t_3f}e^{t_2g}e^{t_1f} \neq e^{t_2g}e^{(t_1+t_3)f},$$

weil die Flüsse nicht kommutieren müssen. Wir benötigen noch einige Konzepte aus der Differentialgeometrie. Für eine stetige differenzierbare Abbildung $f = (f_1, \dots, f_n)^T : O \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert auf einer offenen Menge $O \subset \mathbb{R}^p$, bezeichnen wir mit f_* die Jacobi-Matrix von f , betrachtet als eine Matrix-Funktion auf O . Das heißt, für jedes $x^0 \in O$ ist $f_*(x^0) \in \mathbb{R}^{n \times p}$ die in x^0 ausgewertete Jacobi-Matrix, deren (i, j) ter Eintrag $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Big|_{x=x^0}$ ist.

Im Spezialfall $p = n$ heißt solch eine stetig differenzierbare Funktion f Vektorfeld auf O . Im Weiteren nehmen wir immer an, dass Vektorfelder C^∞ sind. Die Menge aller Vektorfelder auf $O \subset \mathbb{R}^n$ ist ein Vektorraum, bezeichnet mit $\mathbb{V}(O)$.

Ist $\varphi : O \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, so ist $\varphi_*(x) = \nabla\varphi(x)$ ein Zeilenvektor, der Gradient von φ , ausgewertet in x . Die Menge aller glatten (C^∞ -)Funktionen

$\varphi : O \rightarrow \mathbb{R}$ ist wieder ein Vektorraum, bezeichnet mit $\mathbb{F}(O)$. Für jedes $f \in \mathbb{V}(O)$ und jedes $\varphi \in \mathbb{F}(O)$ ist $L_f\varphi \in \mathbb{F}(O)$ die Richtungs-Ableitung oder Lie-Ableitung von φ entlang f ,

$$(L_f\varphi)(x) = \varphi_*(x)f(x)$$

(wie für Lyapunov-Funktionen). Man kann L_f als einen linearen Operator auf $\mathbb{F}(O)$ auffassen. Zwei Vektorfelder $f, g \in \mathbb{V}(O)$ sind genau dann gleich, wenn $L_f = L_g$: In der Tat, aus $L_f = L_g$ folgt, dass für jede der n (linearen) Koordinatenfunktionen $\pi_i(x) = x_i$ gilt: $f_i(x) = (L_f\pi_i)(x) = (L_g\pi_i)(x) = g_i(x)$. Beachte, dass L_f ein Differential-Operator erster Ordnung ist, während die Komposition $L_fL_g := L_f \circ L_g$ ein Operator zweiter Ordnung ist: es sei

$$H_\varphi = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \right)$$

die Hesse-Matrix. Dann folgt

$$L_fL_g\varphi = L_f(\varphi_*g) = (\varphi_*g)_*f = g^T H_\varphi f + \varphi_*g_*f.$$

Weil H_φ symmetrisch ist, folgt

$$L_fL_g\varphi - L_gL_f\varphi = L_{g_*f - f_*g}\varphi. \quad (2.4)$$

Dies ist also wieder ein Differentialoperator erster Ordnung. Dann kann man die Lie-Klammer folgendermaßen definieren.

Definition 2.11 Die Lie-Klammer von $f, g \in \mathbb{V}(O)$ ist $[f, g] = g_*f - f_*g \in \mathbb{V}(O)$.

Mit dieser Notation bedeutet die Gleichung (2.4) daher

$$L_{[f, g]} = L_fL_g - L_gL_f. \quad (2.5)$$

Wir notieren, dass diese Operation linear in jedem ihrer Argumente ist und $[f, g] = -[g, f]$. Manchmal ist es bequem zu schreiben

$$\text{ad}_f g = [f, g]$$

und ad_f als linearen Operator auf $\mathbb{V}(O)$ zu betrachten. Dies ist ein „Differential-Operator“ bezüglich der Lie-Klammer in folgendem Sinn:

$$\text{ad}_f[g, h] = [\text{ad}_f g, h] + [g, \text{ad}_f h]$$

für alle f, g, h . Diese Formel heißt auch *Jacobi-Identität*, insbesondere, wenn sie in der äquivalenten Form (man beachte die zyklische Vertauschung von f, g , und h)

$$[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0 \quad (2.6)$$

geschrieben wird. Der **Beweis** ist **Übungsaufgabe**.

Wir notieren die folgenden weiteren Eigenschaften.

Lemma 2.12 Für alle $f, g \in \mathbb{V}(O)$ und alle $\varphi, \psi \in \mathbb{F}(O)$ gilt:

- (i) $L_f(\varphi\psi) = L_f(\varphi)\psi + \varphi(L_f\psi)$;
- (ii) $L_{\varphi f}(\psi) = \varphi L_f\psi$;
- (iii) $[\varphi f, \psi g] = \varphi\psi[f, g] + (L_f\psi)\varphi g - (L_g\varphi)\psi f$.

Beweis. Übungsaufgabe. ■

Mit den obigen Bezeichnungen kann man die Definition einer Lie-Algebra jetzt so fassen:

Definition 2.13 Eine Lie-Algebra (von Vektorfeldern auf O) ist ein linearer Unterraum $\mathcal{L} \subset \mathbb{V}(O)$, der bezüglich der Bildung von Lie-Klammern abgeschlossen ist, das heißt, $[f, g] \in \mathcal{L}$, falls f und g in \mathcal{L} sind.

Für Teilmengen $A \subset \mathbb{V}(O)$ ist die von A erzeugte Lie-Algebra $\mathcal{L}(A)$ der Durchschnitt aller Lie-Algebren, die A enthalten. Dieser (nichtleere) Durchschnitt ist eine Lie-Algebra, weil Durchschnitte von Lie-Algebren wieder Lie-Algebren sind.

Lemma 2.14 Für $A \subset \mathbb{V}(O)$ definiere

$$A_0 := A, A_{k+1} := \{[f, g], f \in A_k \text{ und } g \in A\}, k \geq 0,$$

und $A_\infty := \bigcup_{k \geq 0} A_k$. Dann ist $\mathcal{L}(A)$ gleich dem linearen Abschluss von A_∞ , also $\mathcal{L}(A) = \langle A_\infty \rangle$.

Beweis. Es ist klar, dass $\langle A_\infty \rangle \subset \mathcal{L}(A)$. Für die Umkehrung müssen wir zeigen, dass $\langle A_\infty \rangle$ eine Lie-Algebra ist, also abgeschlossen bezüglich Lie-Klammerbildung ist. Weil $[f, \cdot]$ linear ist, müssen wir zeigen, dass

$$f \in \langle A_\infty \rangle \text{ und } g \in A_k \implies [f, g] \in \langle A_\infty \rangle.$$

Weil auch $[\cdot, g]$ linear ist, reicht es zu zeigen, dass $[f, g] \in \langle A_\infty \rangle$ für $f \in A_\infty$ und $g \in A_k$. Wir zeigen dies durch Induktion über k :

Für $k = 0$ ist dies klar, weil für $g \in A_0 = A$ und $f \in A_\ell$ folgt $[f, g] \in A_{\ell+1}$. Die Behauptung sei jetzt bewiesen für alle Indizes kleiner oder gleich k . Wähle $f \in A_\infty$ und $g = [g_0, g_1] \in A_{k+1}$ mit $g_0 \in A_k$ und $g_1 \in A$. Die Jacobi-Identität (2.6) liefert

$$[f, g] = [f, [g_0, g_1]] = [[f, g_0], g_1] - [[f, g_1], g_0].$$

Nach Induktionsannahme ist $[f, g_0] \in \langle A_\infty \rangle$ und dann $[[f, g_0], g_1] \in \langle A_\infty \rangle$. Ähnlich liefert die Induktionsannahme, dass $[[f, g_1], g_0] \in \langle A_\infty \rangle$, zusammen also $[f, g] \in \langle A_\infty \rangle$. ■

Dieses Lemma zeigt, wie man $\mathcal{L}(A)$ aus A erhält.

Seien $W \subset \mathbb{R}^p$ und $O \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir nennen eine glatte Abbildung

$$M : W \rightarrow O$$

eine Scheibe (slice) falls ihre Jacobi-Matrix $M_*(w)$ in jedem $w \in W$ den Rang p hat. Ein Vektorfeld $f \in \mathbb{V}(O)$ heißt *tangential an M* , falls für alle $w \in W$ das Bild $f(M(w))$ im Spaltenraum von $M_*(w)$ ist, d.h. in dem von den Spalten aufgespannten Unterraum von \mathbb{R}^n .

Wir nennen auch das Bild von M als eine p -dimensionale Scheibe von O . Ist M injektiv, so liefert es, differentialgeometrisch ausgedrückt, eine Karte für die Untermannigfaltigkeit, die durch ihr Bild dargestellt wird. Tangentiale Vektorfelder in diesem Sinn sind genau diejenigen, die im üblichen Sinn tangential an diese Untermannigfaltigkeit sind.

Proposition 2.15 Sei $M : W \rightarrow O$ eine Scheibe. Dann ist die Menge der an M tangentialen Vektorfelder eine Lie-Algebra.

Für den Beweis dieser Proposition benötigen wir das folgende Resultat (das mit linearer Algebra und etwas Analysis bewiesen wird; siehe Sontag [12, Corollary 4.1.6]). Man beachte, dass die Implikation (ii) \implies (i) offensichtlich ist.

Lemma 2.16 *Für eine offene Teilmenge $W \subset \mathbb{R}^p$ betrachte C^k -Funktionen $f : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $Q : W \rightarrow \mathbb{R}^{n \times p}$, für die der Rang von $Q(w)$ konstant auf W ist. Dann sind äquivalent:*

- (i) *Für jedes $w \in W$ gehört $f(w)$ zum Spaltenraum von $Q(w)$, also $f(w) = Q(w)\alpha_w$ für ein $\alpha_w \in \mathbb{R}^p$.*
- (ii) *Für jedes $w_0 \in W$ gibt es eine Umgebung W_0 von w_0 und eine C^k -Funktion $\alpha : W_0 \rightarrow \mathbb{R}^p$, so dass*

$$f(w) = Q(w)\alpha(w) \text{ für alle } w \in W.$$

Beweis. (von Proposition 2.15). Natürlich ist die Menge der Vektorfelder, die tangential an M sind, ein linearer Unterraum von $\mathbb{V}(O)$. Anwendung von Lemma 2.16 auf $f \circ M$ und $Q(w) := M_*(w)$ zeigt, dass f genau dann tangential an M ist, wenn es für jedes $w_0 \in W$ eine Umgebung W_0 und ein glattes $\alpha : W_0 \rightarrow \mathbb{R}^p$ gibt, so dass

$$f(M(w)) = M_*(w)\alpha(w) \text{ für alle } w \in W_0.$$

Wähle tangentielle Vektorfelder f, g und ein $w_0 \in W_0$. Wir müssen zeigen, dass $[f, g](M(w_0))$ im Spaltenraum von $M_*(w_0)$ liegt. Wähle mit Hilfe von Lemma 2.16 eine Umgebung W_0 von w_0 und glatte $\alpha, \beta : W_0 \rightarrow \mathbb{R}^p$, so dass für alle $w \in W_0$

$$f(M(w)) = M_*(w)\alpha(w) \text{ und } g(M(w)) = M_*(w)\beta(w).$$

Wir werden

$$[f, g](M(w)) = M_*(w)[\alpha, \beta](w) \text{ für alle } w \in W_0 \tag{2.7}$$

zeigen. Weil $w_0 \in W$ beliebig ist, folgt, dass $[f, g]$ tangential an M ist, und damit die Behauptung. Betrachte

$$\tilde{f}(w) := f(M(w)) = M_*(w)\alpha(w) \text{ und } \tilde{g}(w) := g(M(w)) = M_*(w)\beta(w).$$

Die Kettenregel liefert

$$(\tilde{f})_*(w) = f_*(M(w))M_*(w), \quad (\tilde{g})_*(w) = g_*(M(w))M_*(w). \tag{2.8}$$

Für $i \in 1, \dots, n$ sei e_i der i -te kanonische Einheitsvektor; betrachte die glatte Funktion

$$\varphi_i = e_i^T M : W_0 \rightarrow \mathbb{R}.$$

Dann ist nach (2.7)

$$e_i^T \tilde{f} = e_i^T M_*(w)\alpha(w) = L_\alpha \varphi_i \text{ und } e_i^T \tilde{g} = e_i^T M_*(w)\beta(w) = L_\beta \varphi_i, \tag{2.9}$$

und daher

$$\begin{aligned} e_i^T (g_* f)(M(w)) &= e_i^T g_*(M(w))f(M(w)) \\ &= e_i^T g_*(M(w))M_*(w)\alpha(w) \\ &= e_i^T (\tilde{g})_*(w)\alpha(w) \text{ wegen (2.8)} \\ &= (e_i^T \tilde{g})_*(w)\alpha(w) \\ &= (L_\beta \varphi_i)_*(w)\alpha(w) \text{ wegen (2.9)} \\ &= (L_\alpha L_\beta \varphi_i)(w). \end{aligned}$$

Ein analoges Argument liefert

$$e_i^T(f_*g)(M(w)) = (L_\beta L_\alpha \varphi_i)(w).$$

Mit $L_{[\alpha, \beta]} = L_\alpha L_\beta - L_\beta L_\alpha$ erhalten wir

$$e_i^T[f, g](M(w)) = (L_{[\alpha, \beta]} \varphi_i)(w) = e_i^T M_*(w)[\alpha, \beta](w).$$

Weil dies für alle i gilt, folgt (2.7) und der Beweis von Proposition 2.15 ist vollständig. ■

Im Weiteren fixieren wir eine offene Teilmenge $O \subset \mathbb{R}^n$ und eine Menge $A \subset \mathbb{V}(O)$ von Vektorfeldern.

Definition 2.17 Ein k -Tupel (f_1, \dots, f_k) in A ist nichtsingular in $x^0 \in O$, falls es $t_0 = (t_1^0, \dots, t_k^0) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^k$ gibt, so dass für

$$\Phi_{f_1, \dots, f_k}^{x^0} : D \rightarrow O, \quad t = (t_1, \dots, t_k) \mapsto e^{t_k f_k} \dots e^{t_1 f_1} x^0,$$

definiert auf einer offenen Menge $D \subset \mathbb{R}^k$ mit $0 \in D$, die Jacobi-Matrix in t^0 den Rang k hat.

Die Lösung $t \mapsto e^{tf} x^0$ ist C^∞ , weil f eine C^∞ -Funktion ist, daher ist auch Φ eine C^∞ -Funktion. Das nächste Lemma ist entscheidend für den Beweis von Satz 2.7.

Lemma 2.18 Wenn für die Lie-Algebra $\mathcal{L}(A)$ die Rang-Bedingung

$$\text{rang} \mathcal{L}(A)(x^0) = n$$

gilt, so gibt es ein nichtsinguläres n -Tupel in x^0 . Ferner gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $t^0 \in \mathbb{R}^n$ mit $0 < t_i^0 < \varepsilon$ für alle i und $f_1, \dots, f_n \in A$, so dass $\left(\Phi_{f_1, \dots, f_n}^{x^0}\right)_*(t^0)$ den Rang n hat.

Beweis. Wir können annehmen, dass $\text{rang} \mathcal{L}(A)(x) = n$ für alle $x \in O$ gilt, indem wir, wenn nötig, O durch eine kleinere Umgebung von x^0 ersetzen. Fixiere $\varepsilon > 0$. Es sei k die größte ganze Zahl, für die ein k -Tupel (f_1, \dots, f_k) in A und ein $t^0 \in \mathbb{R}^k$ mit $0 \leq t_i^0 < \varepsilon$ existieren, so dass $\Phi_{f_1, \dots, f_k}^{x^0}$ auf einer Umgebung von

$$[0, t_1^0] \times \dots \times [0, t_k^0]$$

definiert ist und $\text{rang} \left(\Phi_{f_1, \dots, f_k}^{x^0}\right)_*(t^0) = k$ erfüllt. Beachte, das $k \geq 1$ gilt, weil es ein $f \in A$ mit $f(x^0) \neq 0$ gibt (andernfalls sind alle Lie-Klammern gleich null, woraus $\mathcal{L}(A)(x^0) = 0$ folgt). Für dieses 1-Tupel hat $\left(\Phi_f^{x^0}\right)_*(0) = f(x^0)$ den Rang eins.

Für den Beweis des Lemmas müssen wir $k = n$ zeigen. Es seien (f_1, \dots, f_k) und $t^0 \in \mathbb{R}^k$ mit $0 \leq t_i^0 < \varepsilon$, so dass $\text{rang} \left(\Phi_{f_1, \dots, f_k}^{x^0}\right)_*(t^0) = k$. Wegen der Stetigkeit können wir annehmen, dass alle Einträge von t^0 positiv sind. Wähle eine Umgebung $W \subset \mathbb{R}^k$ von t^0 (enthalten in O), so dass

$$\text{rang} \left(\Phi_{f_1, \dots, f_k}^{x^0}\right)_*(t) = k \text{ für alle } t \in W,$$

und betrachte die Scheibe $M := \Phi_{f_1, \dots, f_k}^{x^0} : W \rightarrow O$.

Behauptung: Jedes Element von A ist tangential an M .

Andernfalls gibt es $f \in A$, so dass $f(M(s_0))$ für ein $s^0 \in W$ nicht im Spaltenraum von $M_*(s^0)$ liegt. Betrachte das $(k + 1)$ -Tupel

$$(f_1, \dots, f_k, f),$$

setze $G = \Phi_{f_1, \dots, f_k, f}^{x^0}$, und nimm $s^1 := (s^0, 0) = (s_1^0, \dots, s_k^0, 0)$. Beachte, dass G auf einer Umgebung von

$$[0, s_1^0] \times \dots \times [0, s_k^0] \times \{0\}$$

definiert ist. Wir berechnen die Jacobi-Matrix $G_*(s^1)$. Wegen

$$G(t, t_{k+1}) = e^{t_{k+1}f} M(t),$$

ist die Jacobi-Matrix bezüglich der Variablen t gleich $Q(t_{k+1})M_*(t)$, wobei $Q(t_{k+1})$ die Jacobi-Matrix von $x \mapsto e^{t_{k+1}f}x$ ausgewertet in

$$x = M(t) = e^{t_k f_k} \dots e^{t_1 f_1} x^0$$

ist. Insbesondere erhält man für $(t, t_{k+1}) = s^1$ die Matrix $M_*(s^0)$. Die Ableitung bezüglich t_{k+1} ist $f(e^{t_{k+1}f}M(t))$, was ausgewertet in s^1 gleich $f(M(s^0))$ ist. Wir schließen daraus, dass

$$\left(\Phi_{f_1, \dots, f_k, f}^{x^0} \right)_* (s^1) = [M_*(s^0), f(M(s^0))].$$

Dies hat den Rang $k+1$, weil die ersten k Spalten eine Matrix vom Rang k bilden, denn M ist eine Scheibe und die letzte Spalte ist nicht im Aufspann der anderen. Weil alle Einträge von s^1 nichtnegativ und kleiner als ε sind, widerspricht dies der Maximalität von k und die **Behauptung** ist bewiesen.

Daher sind alle Vektorfelder in A tangential an M , und Proposition 2.15 zusammen mit Lemma 2.14 zeigt, dass auch alle Vektorfelder in der Lie-Algebra $\mathcal{L}(A)$ tangential an M sind. Wähle $t \in W$. Dann liegt $f(M(t))$ für $f \in \mathcal{L}(A)$ im Spaltenraum von $M_*(t)$. Daher impliziert die Rang-Bedingung, dass $\text{rang} M_*(t) = n$, also folgt $k = n$ wie gewünscht ■

Jetzt können wir den Beweis von Theorem 2.7 führen. Wir zeigen zunächst, dass für ein Kontrollsystem, das durch die Vektorfelder $F = \{f(\cdot, u), u \in U\}$ beschrieben wird, die *Akzessibilitäts-Rangbedingung*

$$\dim \Delta_{\mathcal{L}(F)}(x^0) = n$$

impliziert, dass für jede Umgebung N von x und jedes $T > 0$ die Menge

$$\{\varphi(t, x, u) \mid 0 \leq t \leq T, u \in \mathcal{U} \text{ und } \varphi(\tau, x, u) \in N \text{ für } t \in [0, t]\}$$

nichtleeres Inneres hat.

Beweis. (von Theorem 2.7) Nach Annahme gibt es eine endliche Teilmenge $A \subset F$ von Vektorfeldern, so dass

$$\Delta_{\mathcal{L}(A)}(x^0) = \mathbb{R}^n.$$

Es gibt $\varepsilon > 0$, so dass für alle $f_1, \dots, f_n \in A$ und alle t_1, \dots, t_n mit $0 \leq t_i < \varepsilon$ der Wert $e^{t_n f_n} \dots e^{t_1 f_1} x^0$ definiert ist. Wir wählen solch ein ε mit $\varepsilon < T/n$. Lemma

2.18 sichert, dass es Vektorfelder $f_1 = f(\cdot, u_1), \dots, f_n = f(\cdot, u_n)$ in A und $t^0 \in \mathbb{R}^n$ mit $0 \leq t_i^0 < \varepsilon$ für alle i gibt, so dass

$$\text{rang}(\Phi_{f_1, \dots, f_n}^{x^0})_*(t^0) = n.$$

Wir können annehmen, dass alle $t_i^0 > 0$ sind und $\Phi_{f_1, \dots, f_n}^{x^0}(x^0) \in N$. Das Inverse-Funktionentheorem garantiert, dass das Bild unter $\Phi_{f_1, \dots, f_n}^{x^0}$ von $\{(t_1, \dots, t_n), 0 < t_i < \varepsilon \text{ für } i = 1, \dots, n\}$ eine offene Umgebung von $\Phi_{f_1, \dots, f_n}^{x^0}(x^0)$ enthält. Natürlich können wir annehmen, dass diese Umgebung in N enthalten ist. Wegen

$$\Phi_{f_1, \dots, f_n}^{x^0}(t) = e^{t_n f(\cdot, u_n)} \dots e^{t_1 f(\cdot, u_1)} x^0 = \varphi(t_1 + \dots + t_n, x^0, u),$$

wobei u die Kontrollfunktion ist, die den Wert u_1 auf $[0, t_1]$, den Wert u_2 auf $[t_1, t_1 + t_2]$ etc. hat, ist dieses Bild in dem positiven Orbit $\mathcal{O}_{\leq T}^+(x^0)$ enthalten. Ferner können wir die Zeiten so klein wählen, dass diese Punkte alle in einer vorgegebenen Umgebung N von x^0 liegen. Damit ist der Beweis von Theorem 2.7 abgeschlossen.

Es folgt auch die analoge Behauptung für negative Zeit: Die Bedingung (2.3) impliziert, dass für jede Umgebung N von x^0 die Menge

$$\{y \in \mathbb{R}^n \mid \text{es gibt } T > 0, u \in \mathcal{U} \text{ mit } x^0 = \varphi(T, y, u), \varphi(t, y, u) \in N \text{ für } t \in [0, T]\}$$

nichtleeres Inneres hat. Für den Beweis betrachtet man das Zeit-umgekehrte System $\dot{x} = -f(x, u)$. Wegen $\mathcal{L}(-A) = \mathcal{L}(A)$ erfüllt es ebenfalls die Akzessibilitäts-Rangbedingung. Daher haben die positiven Orbits für das zeitumgekehrte System nichtleeres Inneres. Sie stimmen mit den negativen Orbits des Originalsystems überein. ■

Bemerkung 2.19 *Manchmal wird lokale Akzessibilität als die Eigenschaft definiert, dass für alle Umgebungen N die Menge der Punkte, die mit Trajektorien innerhalb von N erreicht werden können, nichtleeres Inneres hat. Ist der Kontrollwertebereich beschränkt, so ist dies äquivalent dazu, dass die Menge der Punkte, die von x^0 bis zu einer beliebigen Zeit $T > 0$ erreicht werden können, nichtleeres Inneres hat.*

Bemerkung 2.20 *Die Lie-Algebra $\mathcal{L}(F)$ heißt auch die zu dem Kontrollsystem gehörende Akzessibilitäts-Lie-Algebra.*

Wenn man für konkrete Systeme feststellen möchte, ob die Akzessibilitäts-Rangbedingung erfüllt ist, ist die folgende Notation hilfreich: Wir wissen, dass man Vektorfelder als Lie-Ableitungen auffassen kann, also $f \in \mathbb{V}(O)$ wird mit

$$L_f : \mathbb{F}(O) \rightarrow \mathbb{F}(O), \varphi \mapsto \varphi_* f$$

identifiziert. Speziell liefert

$$f = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ 1 \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

die partielle Ableitung von φ nach x_i , denn $\varphi_* f(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$. Deswegen schreibt man das obige Vektorfeld auch als den Differentialoperator $\frac{\partial}{\partial x_i}$.

Beispiel 2.21 Betrachte in \mathbb{R}^2 mit $U = \mathbb{R}$

$$\dot{x}_1 = x_2^2, \dot{x}_2 = u.$$

Die Akzessibilitäts-Liealgebra wird erzeugt von den Vektorfeldern

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2^2 \\ 0 \end{bmatrix} = x_2^2 \frac{\partial}{\partial x_1} \text{ und } g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Man beachte, dass in $x = 0$ das Vektorfeld f verschwindet. Man berechnet

$$f_*(x) = \begin{bmatrix} 0 & 2x_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, g_*(x) = 0 \text{ und}$$

$$[f, g] = - \begin{bmatrix} 0 & 2x_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 2x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = -2x_2 \frac{\partial}{\partial x_1},$$

und

$$[f, g]_*(x) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

also

$$[[f, g], g] = -[f, g]_* g = - \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Daher ist der Rang der Akzessibilitäts-Liealgebra überall gleich 2 und lokale Akzessibilität folgt. Offenbar ist das System nicht kontrollierbar, weil für jedes $x^0 = (x_1^0, x_2^0)^T \in \mathbb{R}^2$ die erreichbare Menge enthalten ist in $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq x_1^0\}$.

Manchmal impliziert die Akzessibilitäts-Rangbedingung schon die Kontrollierbarkeit. Es sei daran erinnert, dass eine Teilmenge von \mathbb{R}^n zusammenhängend ist, wenn sie keine echten abgeschlossenen und offenen Teilmengen enthält.

Proposition 2.22 Die Menge der Vektorfelder F sei symmetrisch um 0, d.h., $f \in F$ impliziert $-f \in F$. Dann gilt:

(i) Ist $\text{rang}\mathcal{L}(A)(x^0) = n$, so ist für jede Umgebung N von x^0 der Punkt x^0 im Innern der Menge

$$\{\varphi(T, x, u) \mid T > 0, u \in \mathcal{U} \text{ und } \varphi(t, x, u) \in N \text{ für } t \in [0, T]\}.$$

(ii) Ist M eine offene zusammenhängende Teilmenge von \mathbb{R}^n und ist $\text{rang}\mathcal{L}(A)(x^0) = n$ für alle $x^0 \in M$, so ist das System kontrollierbar auf M .

Beweis. (i) Betrachte, ähnlich wie im Beweis von Theorem 2.7, die Abbildung

$$(t_1, \dots, t_n) \mapsto e^{t_n f_n} \dots e^{t_1 f_1} x^0, \quad 0 \leq \sigma < t_i < \varepsilon,$$

mit $f_i \in F$ und offenem Bild in \mathbb{R}^n . Nun fixiere (s_1, \dots, s_n) mit $\sigma < s_i < \varepsilon$ und betrachte die Abbildung

$$(t_1, \dots, t_n) \mapsto e^{s_n(-f_n)} \dots e^{s_1 f_1} e^{s_n(-f_n)} \dots e^{t_1 f_1} x^0, \quad 0 \leq \sigma < t_i < \varepsilon.$$

Weil $e^{s_i(-f_i)} = e^{-s_i f_i}$ Homöomorphismen sind, folgt, dass das Bild dieser Abbildung eine offene Menge ist, und x^0 liegt darin, weil man $t_i = s_i$ für alle i wählen kann.

(ii) Die Erreichbarkeitsmenge von x^0 ist nach (i) offen. Ist sie eine echte Teilmenge von M , so ist sie nicht abgeschlossen in M . Also hat sie einen Randpunkt z in M , der nicht in dieser Erreichbarkeitsmenge liegt. Wieder nach (i) ist die Erreichbarkeitsmenge von z eine Umgebung von z und schneidet daher die Erreichbarkeitsmenge von x^0 . Wegen $F = -F$ folgt, dass man von einem Punkt in diesem Durchschnitt und damit von x^0 aus den Punkt z erreichen kann. Dies ist ein Widerspruch zur Wahl von z . ■

Beispiel 2.23 Betrachte ein Kontrollsystem, das Rotationen im \mathbb{R}^3 um einen Punkt beschreibt (zum Beispiel für einen Satelliten). Die Kontrollen sollen Rotation um die z -Achse und um die y -Achse erlauben. Die zugehörigen Vektorfelder (für Rotation entgegen der Uhrzeigerrichtung) sind

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ x \end{pmatrix}$$

mit den Flüssen

$$e^{tf} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

$$e^{tg} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & 0 & -\sin t \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin t & 0 & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Die Folge von Rotationen mit f (um die z -Achse) für $\pi/2$ Sekunden, mit g (um die y -Achse) für $\pi/2$ Sekunden und mit f für $-\pi/2$ Sekunden (um die z -Achse) hat eine andere Auswirkung als die Rotation mit g (um die y -Achse) für $\pi/2$ Sekunden. Ersteres produziert eine Drehung im Uhrzeigersinn um $\pi/2$ um die x -Achse. Die Flüsse kommutieren also nicht. Dies sieht man leicht geometrisch; algebraisch ergibt es sich aus

$$\begin{aligned} e^{(-\pi/2)f} e^{(\pi/2)g} e^{(\pi/2)f} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ z \\ -y \end{pmatrix} \\ &\neq \begin{pmatrix} -z \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = e^{(\pi/2)g} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Zum Nachprüfen der lokalen Akzessibilität in diesem Beispiel berechnen wir die Lie-Klammer

$$\begin{aligned} [f, g](x, y, z) &= g_* f - f_* g \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -z \\ 0 \\ x \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -z \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ z \\ -y \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Entwicklung nach der ersten Spalte liefert

$$\det(f, g, [f, g]) = \det \begin{bmatrix} -y & -z & 0 \\ x & 0 & z \\ 0 & x & -y \end{bmatrix} = yxz - xyz = 0.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} [f, [f, g]] &= [f, g]_* f - f_* [f, g] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ z \\ -y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -z \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ 0 \\ -x \end{bmatrix} = -g. \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} [g, [f, g]] &= [f, g]_* g - g_* [f, g] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -z \\ 0 \\ x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ z \\ -y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ x \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{bmatrix} = f. \end{aligned}$$

Entwicklung nach der letzten Spalte liefert

$$\det(f, g, [f, [f, g]]) = \det \begin{bmatrix} -y & -z & -z \\ x & 0 & 0 \\ 0 & x & -x \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} -y & -z & 0 \\ x & 0 & 0 \\ 0 & x & -2x \end{bmatrix} = -2x^2z.$$

Daher ist die Lie-Algebra, die von f und g erzeugt wird, gleich der Menge aller Linearkombinationen von f und g . Die Liealgebra-Rang-Bedingung ist verletzt.

Wir werden in den Übungen eine (realistischere) Variante dieses Beispiels analysieren. Hier bemerken wir nur, dass das obige System nicht lokal akzessibel ist, weil aus der lokalen Akzessibilität in jedem Punkt folgt, dass die Akzessibilitäts-Rangbedingung auf einer offenen und dichten Teilmenge gilt (siehe Sontag [12, Theorem 11, p. 177]).

Ein relevante Klasse von Kontrollsystemen sind kontrollaffine Systeme; sie haben die folgende Form.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) &= f_0(x(t)) + u_1(t)f_1(x(t)) + \dots + u_m(t)f_m(x(t)), \quad (2.10) \\ u \in \mathcal{U} &= \{u = (u_i) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m, u(t) \in U \text{ für } t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Hierbei sind die f_i glatte Vektorfelder auf \mathbb{R}^n ; das Vektorfeld f_0 heißt Drift-Vektorfeld f_1, \dots, f_m heißen Kontroll-Vektorfelder. Manchmal schreibt man auch kurz

$$\dot{x} = f_0(x) + G(x)u$$

mit $G = (f_1, \dots, f_m) \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Für kontrollaffine Systems kann die Akzessibilitäts-Lie-Algebra durch weniger Elemente erzeugt werden als im allgemeinen Fall.

Proposition 2.24 *Betrachte ein kontrollaffines System der Form (2.10), für das der Kontroll-Wertebereich $U \subset \mathbb{R}^m$ die Null enthält und linear den \mathbb{R}^m aufspannt. Dann erfüllt die Akzessibilitäts-Liealgebra, also die von $F = \{f(\cdot, u), u \in U\}$ erzeugte Liealgebra*

$$\mathcal{C} = \mathcal{L}(F) = \mathcal{L}(f_0, f_1, \dots, f_m).$$

Beweis. Es reicht, zu zeigen, dass die linearen Hüllen von $\{f_0, f_1, \dots, f_m\}$ und von F übereinstimmen. Nach Definition ist jedes Element in F von der Form

$$f(\cdot, u) = f_0 + \sum_{i=1}^m u_i f_i$$

und ist daher natürlich in der linearen Hülle der f_i . Umgekehrt, mit $u = 0 \in U$ findet man $f_0 \in F$ und daher ist für jedes $u \in U$

$$G(x)u = u_1 f_1 + \dots + u_m f_m = f(x, u) - f(x, 0)$$

in der linearen Hülle von F . Um einzusehen, dass dies auch für jedes f_i , $i = 1, \dots, m$, gilt, schreibe den i ten kanonischen Basisvektor von \mathbb{R}^m als Linearkombination von Elementen aus U ,

$$e_i = \sum_{j=1}^m \rho_j u^j, u^j \in U.$$

Dann ist $f_i = G(x)e_i = \sum_{j=1}^m \rho_j G(x)u^j$, also in der linearen Hülle von F . ■

In Theorem 2.7 betrachten wir Mengen von Punkten, die in jeweils einer Zeitrichtung (in positiver Zeit oder in negativer Zeit) erreichbar sind. Die Rang-Bedingung impliziert auch Eigenschaften von Punkten, die in positiver und negativer Zeit kombiniert erreichbar sind., Dies ist eine klassische Konstruktion in der Differentialgeometrie und führt zu Resultaten, die als Theoreme von Frobenius und von Chow bekannt sind. Die definitive Version stammt von H. Sussmann und P. Stefan und ist als Orbit-Theorem bekannt. Es stellt fest, dass alle Orbits Untermannigfaltigkeiten sind.

Auch viele in Anwendungen relevante Kontrollsysteme haben die Eigenschaft, dass Gehen in positiver und negativer Zeit erlaubt ist. Betrachte driftfreie Systeme

$$\dot{x}(t) = u_1(t)f_1(x(t)) + \dots + u_m(t)f_m(x(t)) \text{ mit } (u_1, \dots, u_m) \in U$$

wobei für den Kontrollwertebereich $U = -U$ gilt. Dann erfüllt die Menge der definierenden Vektorfelder

$$F = \{u_1 f_1 + \dots + u_m f_m, u \in U\}$$

die Bedingung $F = F$ und daher stimmt das zeitumgekehrte System mit dem Originalsystem überein. Viele Systeme aus der Mechanik, wie das Einrad, Satelliten oder Trailer, sind von diesem Typ.

Akzessibilität ist eine viel schwächere Bedingung als vollständige Kontrollierbarkeit. Trotz intensiver Forschung und vieler Spezialresultate sind keine allgemeinen notwendigen *und* hinreichenden Bedingungen bekannt (nicht einmal

für bilineare Systeme ohne Kontrollbeschränkungen) Sind Kontrollbeschränkungen vorhanden, so wird vollständige Kontrollierbarkeit eher die Ausnahme sein. Stattdessen sind maximale Teilmengen vollständiger Kontrollierbarkeit (also Kontrollmengen) das angemessene Konzept.

Für lineare Systeme der Form

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

fordert die Kalman-Rangbedingung, dass

$$rg(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n.$$

Ferner haben wir gesehen, dass die Akzessibilitäts-Liealgebra $\mathcal{C} = \mathcal{LA}(F)$, die von den Vektorfeldern $f(x) = Ax$ und $g_i(x) = b_i = Be_i$ erzeugt wird, die Vektorfelder

$$[f, g_i] = -AB, [f, [f, g_i]] = A^2B, \dots, [f, [f, \dots, g_i] \dots] = (-1)^{n-1} A^{n-1} b_i$$

enthält, und dass die Akzessibilitäts-Rangbedingung in x äquivalent ist zu

$$rg(Ax, B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n.$$

Für $x \neq 0$ ist diese Bedingung offenbar schwächer als die Kalman-Rangbedingung. Außerdem wissen wir, dass die Kalman-Rangbedingung sogar impliziert, dass für jede Umgebung N von x die Erreichbarkeitsmenge

$$\mathcal{O}_{N,T}^+(x) = \{\varphi(T, x^0, u) \mid \varphi(t, x^0, u) \in N \text{ für } 0 \leq t \leq T\}$$

nichtleeres Inneres hat. Es liegt nahe, diese Eigenschaft für nichtlineare Systeme zu untersuchen.

Definition 2.25 *Ein Kontrollsystem der Form*

$$\dot{x} = f_0(x) + u_1 f_1(x) + \dots + u_m f_m(x) \quad (2.11)$$

heißt lokal stark akzessibel, von x^0 , wenn für jede Umgebung N von x^0 und jedes $T > 0$ die Erreichbarkeitsmenge $\mathcal{O}_{N,T}^+(x)$ nichtleeres Inneres hat.

Zur Charakterisierung dieser Eigenschaft führen wir die folgende neue Liealgebra ein.

Definition 2.26 *Es sei $\mathcal{C} = \mathcal{L}(F)$ die Akzessibilitäts-Liealgebra von (2.11). Definiere \mathcal{C}_0 als die kleinste Liesubalgebra, die f_1, \dots, f_m enthält und für die*

$$[f_0, f] \in \mathcal{C}_0 \text{ für alle } f \in \mathcal{C}_0.$$

Wir nennen \mathcal{C}_0 die starke Akzessibilitäts-Liealgebra.

Weil es sich um eine Liealgebra handelt, gilt für die Distribution

$$\Delta_{\mathcal{C}_0}(x) = \{f(x) \in \mathbb{R}^n \mid f \in \mathcal{C}_0\},$$

dass $f(x), g(x) \in \Delta_{\mathcal{C}_0}(x)$ impliziert $[f, g](x) \in \Delta_{\mathcal{C}_0}(x)$. Eine Distribution mit dieser Eigenschaft heißt involutiv.

Man rechnet leicht nach, dass für ein lineares Kontrollsystem $\dot{x} = Ax + Bu$ gilt

$$\mathcal{C}_0 = \text{span}\{b_i, Ab_i, \dots, A^{n-1}b_i, i = 1, \dots, m\}$$

und daher

$$\Delta_{\mathcal{C}_0}(x) = \text{Im}(B, \dots, A^{n-1}B).$$

Ähnlich wie für die Akzessibilitäts-Liealgebra in Proposition 2.14 erhalten wir für die starke Akzessibilitäts-Liealgebra die folgende Charakterisierung.

Proposition 2.27 *Jedes Element von \mathcal{C}_0 ist Linearkombination von iterierten Lie-Klammern der Form*

$$[X_k, [X_{k-1}, [\dots, [X_1, f_i]\dots]]], \quad 1 \leq i \leq m, k \in \{0, 1, \dots\}$$

wobei $X_j \in \{f_0, f_1, \dots, f_m\}, 1 \leq j \leq k$.

Beweis. Sicherlich enthält \mathcal{C}_0 alle Vektorfelder der obigen Form. Um die umgekehrte Inklusion zu beweisen, müssen wir zeigen, dass für zwei Ausdrücke der Form

$$[X_k, [X_{k-1}, [\dots, [X_1, f_i]\dots]] \quad \text{und} \quad [Y_\ell, [X_{\ell-1}, [\dots, [X_1, f_j]\dots]]],$$

$X_j, Y_j \in \{f_0, f_1, \dots, f_m\}, 1 \leq j \leq k$, ihre Lieklammer in der linearen Hülle A von Ausdrücken der obigen Form ist. Wir zeigen durch Induktion über k , dass dies für alle ℓ gilt.

Für $k = 0$ ist dies klar, weil (wähle $Y_{\ell+1} := f_i$)

$$[f_i, [Y_\ell, [X_{\ell-1}, [\dots, [X_1, f_j]\dots]]]$$

sicher eine iterierte Lie-Klammer der obigen Form ist. Die Behauptung sei bewiesen für all Indizes kleiner oder gleich k . Dann gilt wegen der Linearität im zweiten Argument, dass für alle Indizes kleiner oder gleich k die Lieklammer mit einem Element von A in A liegt. Für $k + 1$ und

$$Y := [Y_\ell, [X_{\ell-1}, [\dots, [X_1, f_j]\dots]]]$$

folgt mit der Jacobi-Identität

$$\begin{aligned} & [[X_{k+1}, [X_k, [X_{k-1}, [\dots, [X_1, f_i]\dots]]], Y] \\ &= -[Y, [X_{k+1}, [X_k, [X_{k-1}, [\dots, [X_1, f_i]\dots]]]] \\ &= [X_{k+1}, [[X_k, [X_{k-1}, [\dots, [X_1, f_i]\dots]]], Y] + [X_k, [X_{k-1}, [\dots, [X_1, f_i]\dots]], [Y, X_{k+1}]] \end{aligned}$$

Nun ist nach Induktionsvoraussetzung

$$[[X_k, [X_{k-1}, [\dots, [X_1, f_i]\dots]], Y] \in A,$$

also

$$[X_{k+1}, [[X_k, [X_{k-1}, [\dots, [X_1, f_i]\dots]], Y] \in A,$$

wieder mit der Induktionsvoraussetzung. Ferner ist $[Y, X_{k+1}] \in A$, also nach Induktionsvoraussetzung auch

$$[X_k, [X_{k-1}, [\dots, [X_1, f_i]\dots]], [Y, X_{k+1}] \in A.$$

■

Der nächste Satz liefert eine hinreichende Bedingung für starke Akzessibilität.

Theorem 2.28 Für das kontrollaffine System (2.11) gelte die starke Akzessibilitäts-Rangbedingung in $x \in \mathbb{R}^n$

$$\dim \mathcal{C}_0(x^0) = n, \text{ d.h. } \Delta_{\mathcal{C}_0}(x) = \mathbb{R}^n.$$

Dann ist das System lokal stark akzessibel.

Beweis. Der Beweis kann durch den folgenden Trick auf den von Theorem 2.7 zurückgeführt werden. Erweitere den Zustandsraum durch die Gleichung $\dot{\tau} = 1$, wobei τ die Zeitvariable ist, so dass wir das folgende erweiterte System erhalten:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_0(x) + \sum_{i=1}^m u_i f_i(x) \\ \dot{\tau} &= 1 \end{aligned}$$

definiert auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ mit Zustand $\tilde{x} = (x, \tau)$, Drift-Vektorfeld $\tilde{f}_0 = f_0(x) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \tau}$ und Input-Vektorfeldern $\tilde{f}_j = f_j(x) \frac{\partial}{\partial x}$. Es folgt, dass die Akzessibilitäts-Liealgebra des erweiterten Systems für jedes τ^0

$$\dim \tilde{\mathcal{C}}(x^0, \tau^0) = \dim \mathcal{C}_0(x^0) + 1$$

erfüllt: In der Tat, für $i \in \{0, 1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, m\}$ ist die Lie-Klammer $[\tilde{f}_i, \tilde{f}_j] = [f_i, f_j] \frac{\partial}{\partial x}$ und daher sind alle Vektorfelder der Form $f \frac{\partial}{\partial x}, f \in \mathcal{C}_0$, in $\tilde{\mathcal{C}}$. Das Vektorfeld \tilde{f}_0 ist davon offenbar linear unabhängig. Es folgt $\dim \tilde{\mathcal{C}}(x^0, 0) = \dim \mathcal{C}_0(x^0) + 1 = n + 1$. Daher ist das erweiterte System lokal akzessibel von $(x^0, 0)$ und für jedes $T > 0$ und jede Umgebung N von x^0 enthält die erreichbare Menge \tilde{R} in $N \times (-\varepsilon, T + \varepsilon)$ eine offene Menge von $M \times \mathbb{R}$. Daher gibt es eine nichtleere offene Teilmenge $W \subset M$ und ein Intervall $(a, b), 0 < a < b \leq T$, so dass

$$W \times (a, b) \subset \tilde{R}.$$

Sei $\tau \in (a, b)$. Weil $W \times \{\tau\} \subset \tilde{R}$, erhalten wir, dass $W \subset \mathcal{O}_N^{+, \tau}(x^0)$. Wir können auch die Zeit auf T adjustieren, indem wir noch die Lösungsabbildung zur Zeit $T - \tau$ zu irgendeinem Vektorfeld aus F dahinterschalten. Dies ist ein Homöomorphismus, wie die folgende einfache Proposition zeigt. ■

Proposition 2.29 Es sei $u \in \mathcal{U}$ eine zulässige Kontrolle und betrachte für $x^0 \in \mathbb{R}^n$ und $T \in \mathbb{R}$ den Punkt $z^0 = \varphi(T, x^0, u)$. Dann gibt es eine Umgebung V von x^0 , so dass die Abbildung $\alpha : x \mapsto \varphi(T, x, u)$, definiert auf V ein Homöomorphismus auf sein Bild ist, das eine Umgebung von z^0 bildet.

Beweis. Die stetige Inverse ist durch die Abbildung $y \mapsto \varphi(-T, y, u(T + \cdot))$ gegeben, weil

$$\varphi(-T, \varphi(T, x, u), u(T + \cdot)) = x.$$

■

Für das folgende Resultat über Kontrollierbarkeit entlang von Trajektorien siehe z.B. Sontag [12, (1st ed.), Lemma/Exercise 3.6.13].

Theorem 2.30 *Betrachte das kontrollaffine System*

$$\dot{x} = f_0(x) + \sum_{i=1}^m u_i(t) f_i(x), \quad (u_i)_{i=1, \dots, m} \in \mathcal{U}, \quad (2.12)$$

in \mathbb{R}^n und die Trajektorie $\varphi(t, x^0, 0)$, $t \geq 0$, zum Anfangswert $x^0 \in \mathbb{R}^n$ und zur Kontrolle $u \equiv 0 \in \text{int } U$. Es gebe $k \in \mathbb{N}$ und $T > 0$, so dass die folgende Matrix ausgewertet in $\varphi(T, x^0, 0)$ den Rang n hat:

$$[f_1, \dots, f_m, \text{ad}_{f_0} f_1, \dots, \text{ad}_{f_0} f_m, \dots, \text{ad}_{f_0}^k f_1, \dots, \text{ad}_{f_0}^k f_m].$$

Dann ist das linearisierte (zeitabhängige!) Kontrollsystem

$$\dot{z}(t) = Df_0(\varphi(t, x^0, 0))z(t) + \sum_{i=1}^m u_i(t) f_i(\varphi(t, x^0, 0))$$

mit Kontrollen $u \in L_\infty([0, T], \mathbb{R}^m)$ kontrollierbar auf $[0, T]$ (das heißt, die Erreichbarkeitsmenge zur Zeit T bei Start in $x = 0$ zur Zeit $t = 0$ ist \mathbb{R}^n) und für das nichtlineare System gilt $\varphi(T, x^0, 0) \in \text{int } \mathcal{O}_T^+(x)$.

Bemerkung 2.31 *Der Beweis dieses Resultats basiert auf einer Rang-Bedingung (ähnlich der Kalman-Bedingung) für Kontrollierbarkeit zeitabhängiger linearer Kontrollsysteme, die zur obigen Bedingung äquivalent ist. Diese Kontrollierbarkeitsbedingung bedeutet, dass die stetig differenzierbare Abbildung*

$$(u, x) \mapsto \varphi(T, x, u) : L_\infty(0, T, \mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

eine surjektive Ableitung in $(u \equiv 0, x^0)$ hat. Dann impliziert das Open-Mapping-Theorem die zweite Behauptung.

Kapitel 3

Input-to-State Stabilität

In diesem Kapitel betrachten wir Kontrollsysteme, in die zusätzlich eine Störung $w(t)$ eingeht, also Systeme der Form

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), w(t)).$$

Zunächst werden wir gestörte Differentialgleichungen der Form

$$\dot{x}(t) = f(x(t), w(t)) \tag{3.1}$$

betrachten. Hier ist $f : \mathbb{R}^n \times W \rightarrow \mathbb{R}^n$, wobei $W \subset \mathbb{R}^\ell$ eine Menge zulässiger Störungswerte ist. Wie auch sonst werden später Kontrollsysteme, die die gewünschte Stabilitätsbedingung nicht erfüllen, durch geeignete Feedbacks modifiziert. Die Menge der zulässigen Störfunktionen $w(t), t \geq 0$, definieren wir analog zur Menge \mathcal{U} der zulässigen Steuerfunktionen als

$$\mathcal{W} := \{w \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^\ell) \mid w(t) \in W \text{ für alle } t\}.$$

Wir setzen dabei vor aus, dass eindeutige globale Lösungen $\varphi(t, x_0, w)$ mit $\varphi(0, x_0, w) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ existieren.

3.1 Definition der Input-to-State Stabilität

Das Konzept der Input-to-State Stabilität (ISS) wurde 1989 von E. Sontag eingeführt und hat sich seitdem als ein fundamentales Konzept zur Stabilitätsanalyse gestörter nichtlinearer Systeme etablieren können.

Zur Motivation des ISS-Konzepts betrachten wir eine lineare Differentialgleichung der Form

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

Ist diese Gleichung asymptotisch stabil, haben also alle Eigenwerte λ von A negativen Realteil, so gibt es für $\sigma < \max \operatorname{Re} \lambda$ und jede Matrizen-Norm eine Konstante $c > 0$, so dass

$$\|e^{At}\| < ce^{-\sigma t}, t \geq 0.$$

Betrachten wir nun die gestörte Gleichung

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Dw(t)$$

mit einer Matrix $D \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$. Für die zugehörigen Lösungen erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|\varphi(t, x_0, w)\| &\leq \|e^{At}x_0\| + \left\| \int_0^t e^{A(t-s)} Dw(s) ds \right\| \\ &\leq ce^{-\sigma t} \|x_0\| + \int_0^t ce^{-\sigma(t-s)} \|D\| \|w(s)\| ds \\ &\leq ce^{-\sigma t} \|x_0\| + c \|D\| \|w\|_\infty \int_0^t e^{-\sigma s} ds \\ &\leq ce^{-\sigma t} \|x_0\| + \frac{c \|D\|}{\sigma} \|w\|_\infty (1 - e^{-\sigma t}) \\ &< \beta(\|x_0\|, t) + \gamma(\|w\|_\infty) \end{aligned}$$

mit $\beta(\|x_0\|, t) := ce^{-\sigma t} \|x_0\|$ und $\gamma(s) := \frac{c \|D\|}{\sigma} s$, $s \geq 0$ und $\|w\|_\infty = \|w\|_{L^\infty([0, t], \mathbb{R}^\ell)}$.

Die Lösung konvergiert also für $t \rightarrow \infty$ gegen den Ball mit Radius $\frac{c \|D\|}{\sigma} \|w\|_\infty$. Diese Eigenschaft wollen wir für nichtlineare Systeme verallgemeinern, indem wir die wesentlichen Eigenschaften der Funktionen β und γ verwenden.

Die Lösungen zeigen also ein stabilitätsähnliches Verhalten, konvergieren dabei zwar nicht mehr gegen 0, aber immer noch gegen eine Umgebung der 0, deren Größe proportional zur ∞ -Norm der Störung ist. Für nichtlineare Systeme folgt aus der asymptotischen Stabilität diese Robustheit gegenüber Störungen nicht (ein Beispiel wird später gegeben). Die ISS-Eigenschaft verlangt nun gerade diese Robustheit. Dafür benötigen wir Vergleichsfunktionen, deren Konzept im Zusammenhang der Stabilitätsanalyse von W. Hahn in den Büchern [3, 4] eingeführt wurde. Die Idee dieser Funktionen geht dabei auf frühere Arbeiten von Müller und Kamke in den 1920er und 1930er Jahren zurück. In den 1990er Jahren wurde diese Methode zur Formulierung nichtlinearer Stabilitätseigenschaften durch die Arbeiten von E.D. Sontag wiederbelebt und hat sich in der nichtlinearen Kontrolltheorie inzwischen als Standard-Herangehensweise etabliert. Die folgende Definition beschreibt die wichtigsten Klassen dieser Funktionen.

Definition 3.1 *Wir definieren die folgenden Klassen von Vergleichsfunktionen:*

$$\mathcal{K} := \{\alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \mid \text{stetig, streng monoton wachsend mit } \alpha(0) = 0\};$$

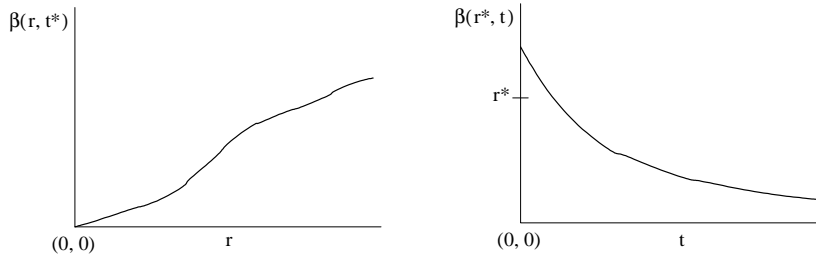
$$\mathcal{K}_\infty := \{\alpha \in \mathcal{K} \mid \alpha \text{ ist unbeschränkt}\};$$

$$\mathcal{L} := \{\gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \mid \text{stetig, streng monoton fallend mit } \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) = 0\};$$

$$\mathcal{KL} := \{\beta : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \mid \text{stetig, } \beta(\cdot, t^*) \in \mathcal{K}, \beta(r^*, \cdot) \in \mathcal{L}, r^* \geq 0, t^* \geq 0\}.$$

Beispiele hierfür sind offenbar $\beta(s, t) := ce^{-\sigma t} s$ und $\gamma(s) := \frac{c \|D\|}{\sigma} s$. Typische

Funktionsverläufe sind in Figur 3.2 illustriert.



Typische \mathcal{KL} -Funktionsverläufe

(3.2)

Mit diesen Funktionen können wir Input-to-state Stabilität definieren, die eine Verallgemeinerung der obigen Eigenschaft linearer Differentialgleichungen für nichtlineare liefert.

Definition 3.2 *Es sei $N \subset \mathbb{R}^n$ eine Umgebung der 0. Eine gestörte Differentialgleichung heißt input-to-state stabil (ISS) auf N , falls Funktionen $\beta \in \mathcal{KL}$ und $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$ existieren, so dass*

$$\|\varphi(t, x, w)\| \leq \beta(\|x\|, t) + \gamma(\|w\|)$$

gilt für alle $x \in N$ und alle $t \geq 0$. Die Gleichung heißt global ISS, falls sie ISS auf $N = \mathbb{R}^n$ ist.

Für nichtlineare Systeme ist, wie oben erwähnt, die „globale Robustheit“ der Stabilität, wie sie für lineare Differentialgleichungen gilt, nicht mehr automatisch gegeben. Betrachte z.B. das eindimensionale System

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \text{ mit } f(x) := \begin{cases} -e^{-x+1}, & x \geq 1 \\ -x, & -1 \leq x < 1 \\ e^{x+1}, & x \leq -1. \end{cases}$$

Dies System ist asymptotisch stabil, weil 0 das einzige Gleichgewicht dieser skalaren Differentialgleichung ist, und $f(x) > 0$ für $x < 0$ und $f(x) < 0$ für $x > 0$ (eine Lyapunov-Funktion ist gegeben durch $V(x) = x^2/2$ mit $W(x) = -xf(x) > 0$). Betrachten wir nun das zugehörige gestörte System

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + w(t),$$

so findet sich für $w \equiv \varepsilon, \varepsilon > 0$, immer ein $\delta > 1$, so dass $f(x) + w > \varepsilon/2$ ist für alle $x \geq \delta$, weil $f(x) = -e^{-x+1} \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$. Jede Lösung mit Anfangswert $x \geq \delta$ muss also streng monoton wachsen und damit gegen ∞ divergieren. Die obige Robustheit — in dem Sinne, dass man für kleine Störung noch Konvergenz in eine Umgebung der 0 erhält — ist hier also nicht gegeben, das System ist nicht global ISS.

Einer anderes Beispiel ist

$$\dot{x} = -x^3 + x^3 u.$$

Das Gleichgewicht $x = 0$ ist offenbar asymptotisch stabil. Mit dem beschränkten Input $u \equiv 2$ erhält man

$$\dot{x} = x^3,$$

und alle nichttrivialen Lösungen gehen gegen ∞ . Das System ist also nicht ISS.

Bevor wir genauer auf dieses Konzept eingehen, werden wir zeigen, dass man die Stabilitätstheorie von Differentialgleichungen mit Hilfe von Vergleichsfunktionen aufbauen kann

3.2 Stabilität und Vergleichsfunktionen

In diesem Abschnitt betrachten wir gewöhnliche Differentialgleichungen der Form

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad (3.3)$$

und nehmen an, dass $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig ist und dass es für jedes $R > 0$ Konstanten $L, M > 0$ gibt mit

$$\|f(x_1)\| \leq M \text{ und } \|f(x_1) - f(x_2)\| \leq L \|x_1 - x_2\|$$

für alle x_1, x_2 mit $\|x_1\| \leq R, \|x_2\| \leq R, \|u\| \leq R$. Die eindeutige Lösung ist $\varphi(t, x_0)$, $t \in J$, ein offenes Intervall um 0.

Lemma 3.3 (i) Für $\alpha \in \mathcal{K}$ sei $\alpha^+ = \sup_{r \geq 0} \alpha(r)$. Dann existiert die Inverse $\alpha^{-1} : [0, \alpha^+) \rightarrow [0, \infty)$.

(ii) Für $\alpha \in \mathcal{K}_\infty$ ist die Inverse α^{-1} auf $[0, \infty)$ definiert und $\alpha^{-1} \in \mathcal{K}_\infty$.

(iii) Sind $\sigma, \theta \in \mathcal{K}$, so folgt auch $\sigma \circ \theta \in \mathcal{K}$. Ist $\beta \in \mathcal{KL}$, so gibt es $\tilde{\beta} \in \mathcal{KL}$ mit $\tilde{\beta}(\cdot, s) \in \mathcal{K}_\infty$ für alle $s \geq 0$ und

$$\beta(r, s) \leq \tilde{\beta}(r, s), \quad r, s \geq 0,$$

Beweis. Übungsaufgabe ■

Wir erinnern an die Definition stabiler Gleichgewichte. Ein Punkt $x^* \in \mathbb{R}^n$ mit $f(x^*) = 0$ ist ein stabiles Gleichgewicht, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit

$$\|x_0\| \leq \delta \text{ impliziert } \|\varphi(t, x_0) - x^*\| \leq \varepsilon \text{ für alle } t \geq 0.$$

Diese Eigenschaft kann mit Vergleichsfunktionen charakterisiert werden.

Theorem 3.4 Ein Gleichgewicht x^* ist genau dann stabil, wenn es eine \mathcal{K}_∞ -Funktion σ gibt, so dass für alle $\varepsilon > 0$

$$\|x_0 - x^*\| \leq \sigma(\varepsilon) \text{ impliziert } \|\varphi(t, x_0) - x^*\| \leq \varepsilon \text{ für alle } t \geq 0.$$

Beweis. Gilt diese Implikation für eine \mathcal{K}_∞ -Funktion σ , so folgt die Stabilität mit $\delta := \sigma(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Umgekehrt, wähle $\varepsilon_0 > 0$ und definiere für $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$

$$\delta(\varepsilon) := \sup\{\delta \geq 0 \mid \|x_0 - x^*\| \leq \delta \text{ impliziert } \|\varphi(t, x_0) - x^*\| \leq \varepsilon \text{ für alle } t \geq 0\}.$$

Dann ist die Funktion δ fallend und stetig in 0 mit $\delta(0) = 0$. Die Existenz einer \mathcal{K} -Funktion mit der gewünschten Eigenschaft folgt aus dem nächsten Lemma. Dies impliziert trivialerweise die Existenz einer \mathcal{K}_∞ -Funktion mit der gewünschten Eigenschaft, weil die Funktion für $\varepsilon > \varepsilon_0$ zu einer unbeschränkten Funktion fortgesetzt werden kann. ■

Lemma 3.5 Sei $\delta : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ wachsend und stetig in 0 mit $\delta(0) = 0$ und $\delta(\varepsilon) > 0$ für $\varepsilon > 0$. Dann gibt es \mathcal{K} -Funktionen σ_1 und σ_2 mit

$$\sigma_1(\varepsilon) \leq \delta(\varepsilon) \leq \sigma_2(\varepsilon).$$

Beweis. Übungsaufgabe ■

Bemerkung 3.6 Stabilität ist auch äquivalent zur Existenz einer \mathcal{K}_∞ -Funktion θ mit

$$\|\varphi(t, x_0) - x^*\| \leq \theta(\|x_0 - x^*\|) \text{ für alle } t \geq 0.$$

Dies folgt aus dem vorangehenden Theorem mit Lemma 3.3(iii) mit $\theta = \sigma^{-1}$.

Wir erinnern auch an das folgende Konzept. Ein Gleichgewicht x^* ist asymptotisch stabil, wenn es stabil ist und attraktiv ist, d.h., wenn es eine Umgebung N besitzt mit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(t, x_0) - x^*\| = 0 \text{ für alle } x_0 \in N.$$

Es heißt global asymptotisch stabil, wenn $N = \mathbb{R}^n$ gewählt werden kann.

Theorem 3.7 Ein Gleichgewicht x^* ist genau dann asymptotisch stabil, wenn es eine \mathcal{KL} -Funktion β und eine Umgebung N von x^* gibt mit

$$\|\varphi(t, x_0) - x^*\| \leq \beta(\|x_0 - x^*\|, t) \text{ für } x_0 \in N \text{ und } t \geq 0. \quad (3.4)$$

Beweis. Die Existenz solch einer \mathcal{KL} -Funktion impliziert die Stabilitätsbedingung für alle $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, wobei ε_0 klein genug ist, so dass $x_0 \in N$ impliziert $\beta(\|x_0 - x^*\|, t) \leq \varepsilon_0$. Die Attraktivität folgt, weil für alle $x_0 \in N$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(t, x_0) - x^*\| \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \beta(\|x_0 - x^*\|, t) = 0,$$

($\beta(\|x_0 - x^*\|, \cdot)$ ist eine \mathcal{L} -Funktion). Für den Beweis der umgekehrten Richtung zitieren wir das folgende Lemma aus Lin, Sontag, Wang, SIAM J. Control Optim., 34 (1996), pp. 124–160.[9, Section 3].

Lemma 3.8 Betrachte $a : [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ mit

(i) für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$, so dass $r \leq \delta$ impliziert $a(r, t) \leq \varepsilon$ für alle $t \geq 0$;

(ii) für alle $\varepsilon > 0$ und $R > 0$ gibt es $T > 0$ mit $a(r, t) < \varepsilon$ für alle $0 \leq r < R$ und $t \geq T$.

Dann existiert eine \mathcal{KL} -Funktion β mit $a(r, t) \leq \beta(r, t)$, $r, t \geq 0$.

In der Tat, dieses Lemma impliziert die Existenz der gewünschten Funktion $\beta \in \mathcal{KL}$: Definiere

$$a(r, t) := \sup\{\|\varphi(t, x_0) - x^*\| \mid \|x_0 - x^*\| \leq r\}.$$

Dann gilt (i) und für r klein genug gilt auch (ii), weil für autonome Differentialgleichungen aus der asymptotischen Stabilität die gleichmäßige Attraktivität folgt: für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ und $T > 0$, so dass

$$\|x_0 - x^*\| \leq \delta \text{ impliziert } \|\varphi(t, x_0) - x^*\| \leq \varepsilon \text{ für alle } t \geq T.$$

■

Das folgende Beispiel zeigt, dass asymptotische Stabilität für nichtlineare Differentialgleichungen nicht exponentiell sein muss.

Beispiel 3.9 Betrachte die eindimensionale Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = -x(t)^3.$$

Die Lösungen sind gegeben durch

$$\varphi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2t + \frac{1}{x^2}}} \text{ für } x \geq 0 \text{ und } \varphi(t, x) = -\frac{1}{\sqrt{2t + \frac{1}{x^2}}} \text{ für } x \leq 0,$$

wie man leicht nachrechnet:

$$\frac{d}{dt} \left(2t + \frac{1}{x^2} \right)^{-1/2} = \left(-\frac{1}{2} \right) \left(2t + \frac{1}{x^2} \right)^{-3/2} \cdot 2 = \left(\left(2t + \frac{1}{x^2} \right)^{-1/2} \right)^3.$$

Das Gleichgewicht $x^* = 0$ ist asymptotisch stabil (sogar global), weil für $\beta \in \mathcal{KL}$ definiert durch

$$\beta(r, t) = \frac{1}{\sqrt{2t + \frac{1}{r^2}}}, \quad r, t \geq 0,$$

die Abschätzung (3.4) gilt. Wir zeigen, dass x^* nicht exponentiell stabil ist. Angenommen, es gibt $c, \sigma > 0$ mit $|\varphi(t, x)| \leq ce^{-\sigma t}|x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0$. Wähle $x \in \mathbb{R}$ und $t^* > 0$ mit $\sqrt{2tx^2 + 1} \leq t$ für alle $t \geq t^*$. Wegen

$$\frac{1}{c}e^{\sigma t} = \frac{1}{c} + \frac{1}{c}\sigma t + \frac{1}{c}\frac{\sigma^2 t^2}{2} + \dots$$

gibt es $t^{**} > 0$ mit $e^{\sigma t}/c > 2t$ für alle $t \geq t^*$. Daher gilt für $t \geq \max\{t^*, t^{**}\}$

$$\frac{e^{\sigma t}}{c} \geq 2t \geq 2\sqrt{2tx^2 + 1}.$$

Dann ist

$$ce^{-\sigma t} = \frac{c}{e^{\sigma t}} < \frac{1}{\sqrt{2tx^2 + 1}}$$

und daher

$$ce^{-\sigma t}|x| < \frac{|x|}{\sqrt{2tx^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2tx^2 + \frac{1}{x^2}}} = |\varphi(t, x)|,$$

im Widerspruch zur Wahl von c und σ .

3.3 Lyapunov-Funktionen

Auch die Theorie der Lyapunov-Funktionen kann mit Hilfe von Vergleichsfunktionen entwickelt werden. Im letzten Semester haben wir (siehe Skript Kontrolltheorie, Wintersemester 2014/15, Abschnitt 3.2) eine einfache Version von Lyapunov-Funktionen kennengelernt, die Stabilität und asymptotische Stabilität garantieren. Hier werden wir dies Konzept verfeinern, um notwendige und hinreichende Bedingungen zu erhalten.

Für asymptotisch stabile Systeme muss $\|\varphi(t, x) - x^*\|$ nicht fallend sein. Die Idee für Lyapunov Funktionen ist es, $\|\varphi(t, x) - x^*\|$ durch eine verallgemeinerte

Distanzfunktion V zu ersetzen, für die $V(\varphi(t, x))$ strikt fallend ist. Ist darüberhinaus V differenzierbar, so kann diese strikte Monotonie ausgedrückt werden durch

$$0 > \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} V(\varphi(t, x)) = DV(x) \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \varphi(t, x) = DV(x)f(x).$$

Dies führt auf die folgende Definition, wobei $\text{cl}N$ und ∂N den Abschluss bzw. den Rand einer Menge N bezeichnen.

Definition 3.10 *Betrachte die Differentialgleichung (3.3) mit $f(0) = 0$. Eine stetige Funktion $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, die stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist, heißt lokale Lyapunov-Funktion, wenn es $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$, eine stetige Funktion $W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, eine beschränkte Umgebung N von 0 und $c > 0$ gibt, so dass gilt:*

$$W(x) > 0 \text{ für alle } x \in \text{cl}N, \quad (3.5)$$

$$V(x) < c \text{ für alle } x \in N, \quad V(x) = c \text{ für alle } x \in \partial N, \quad (3.6)$$

und für alle $0 \neq x \in N$

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|) \quad (3.7)$$

$$DV(x)f(x) \leq -W(x). \quad (3.8)$$

Die Funktion V ist eine globale Lyapunov-Funktion, wenn dies für $N = \mathbb{R}^n$ gilt und $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$ (an Stelle von $V(x) = c$ für alle $x \in \partial N$).

Dann heißt (V, W) auch *Lyapunov-Paar*. Das folgende Lemma gibt eine äquivalente Formulierung von (3.8).

Lemma 3.11 *Sei V eine stetige Funktion, die stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist. Ferner gelte (3.7) auf einer Umgebung N von 0 und (3.6) für ein $c > 0$ (bzw. auf $N = \mathbb{R}^n$). Es gibt genau dann eine stetige Funktion W , die (3.5) und (3.8) erfüllt, wenn es eine lokal Lipschitz-stetige Funktion $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ gibt mit $g(r) > 0$ für alle $r \in (0, c]$ (bzw. für alle $r > 0$ im globalen Fall) und die folgende Ungleichung für alle $0 \neq x \in N$ gilt:*

$$DV(x)f(x) \leq -g(V(x)). \quad (3.9)$$

Beweis. Sei g gegeben. Dann erfüllt $W(x) := g(V(x))$ die Bedingungen aus Definition 3.10. Umgekehrt sei W gegeben. Für $r \in [0, c]$ setzen wir

$$\tilde{g}(r) := \inf\{W(x) \mid x \in \mathbb{R}^n, V(x) = r\}.$$

Im lokalen Fall sei $\tilde{g}(r) = \tilde{g}(c)$ für alle $r > c$. Man überprüft leicht, dass \tilde{g} bereits alle Bedingungen für g erfüllt, außer eventuell der Lipschitz-Stetigkeit. Wähle eine Folge (t_k) , die streng monoton gegen 0 konvergiert ((im globalen Fall wähle eine solche zweiseitige Folge $t_k, k \in \mathbb{Z}$, für die zusätzlich $\lim_{k \rightarrow -\infty} t_k = \infty$ gilt). Definiere $g(0) = 0$ und

$$g_k := \min_{r \in [t_{k+1}, t_{k-1}]} g(r)$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$ (bzw. alle $k \in \mathbb{Z}$). Dann definiere eine stetige, stückweise lineare Funktion

$$g(r) := g_{k+1} + \frac{t - t_{k+1}}{t_k - t_{k+1}}(g_k - g_{k+1}) \text{ für } r \in [t_{k+1}, t_k].$$

Man findet $0 < g(r) \leq \tilde{g}(r)$ für $r \in (0, c]$, daher sind die Bedingungen an g inklusive Lipschitz-Stetigkeit erfüllt. ■

Eine weitere äquivalente Formulierung von (3.8) ist die folgende.

Lemma 3.12 *Eine stetige Funktion $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$, die stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist, erfüllt (3.8) genau dann, wenn für alle Lösungen von (3.3) gilt*

$$V(\varphi(t, x)) \leq V(x) - \int_0^t W(\varphi(s, x)) ds. \quad (3.10)$$

Beweis. Durch Differentiation bzw. Integration dieser Ungleichungen. ■

Der Vorteil der integrierten Versionen ist, dass sie auch für nicht differenzierbare Lyapunov-Funktionen verwendet werden können. Beachte, dass man für (3.9) die Ungleichung (3.10) mit $W(x) = g(V(x))$ erhält.

Jetzt formulieren und beweisen wir das erste Hauptresultat dieses Abschnitts, die Existenz einer Lyapunov-Funktion impliziert asymptotische Stabilität.

Theorem 3.13 *Betrachte die Differentialgleichung (3.3) mit $f(0) = 0$. Wenn eine lokale (globale) Lyapunov-Funktion V im Sinn von Definition 3.10 existiert, so ist das Gleichgewicht $x^* = 0$ lokal (global) asymptotisch stabil. Hierbei ist die Vergleichsfunktion $\beta \in \mathcal{KL}$ gegeben durch*

$$\beta(r, t) = \alpha_1^{-1}(\mu(t, \alpha_2(r))), \quad (3.11)$$

wobei μ die Lösung des eindimensionalen Anfangswertproblems

$$\frac{d}{dt}\mu(t, r) = -g(\mu(t, r)), \quad \mu(0, r) = r \quad (3.12)$$

ist mit g wie in Lemma 3.11.

Beweis. Betrachte die Lösung $\mu(t, r)$ von (3.12), Wir zeigen zunächst, dass für alle $x \in N$

$$V(\varphi(t, x)) \leq \mu(t, V(x)) \text{ für } t \geq 0. \quad (3.13)$$

Wähle $x \in N$ und definiere für $\varepsilon > 0$

$$h_\varepsilon(t) = V(x) - \int_0^t (g(h_\varepsilon(s)) - \varepsilon) ds.$$

Weil h_ε das Problem $\dot{h}_\varepsilon(t) = -g(h_\varepsilon(t)) + \varepsilon$, $h_\varepsilon(0) = V(x)$ löst (die Lösung existiert auf \mathbb{R}_+), impliziert Gronwalls Lemma $h_\varepsilon(t) \rightarrow \mu(t, V(x))$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ und jedes $t \geq 0$. Daher reicht es zu zeigen, dass $V(\varphi(t, x)) \leq h_\varepsilon(t)$ für alle $t > 0$ und alle $\varepsilon > 0$. Gilt dies nicht, so gibt es $t > 0$ mit $V(\varphi(t, x)) > h_\varepsilon(t)$. Sei $t^* := \inf\{t \geq 0 \mid V(\varphi(t, x)) > h_\varepsilon(t)\}$. Die Stetigkeit impliziert $V(\varphi(t^*, x)) = h_\varepsilon(t^*)$, und daher für $\tau \geq 0$

$$\begin{aligned} V(\varphi(t^* + \tau, x)) - h_\varepsilon(t^* + \tau) &\leq - \int_0^\tau g(V(\varphi(t^* + s, x))) ds + \int_0^t (g(h_\varepsilon(t^* + s)) - \varepsilon) ds \\ &= \int_0^\tau [g(h_\varepsilon(t^* + s)) - g(V(\varphi(t^* + s, x)))] ds - \tau\varepsilon. \end{aligned}$$

Sei jetzt L eine Lipschitz-Konstante von g in einer Umgebung von $h_\varepsilon(t^*)$ und $\tau^* > 0$ klein genug, so dass $V(\varphi(t^* + s, x))$ und $h_\varepsilon(t^* + s)$ für alle $s \in [0, \tau^*]$ in dieser Umgebung sind. Dann folgt für alle $\tau \in (0, \tau^*]$

$$V(\varphi(t^* + \tau, x)) - h_\varepsilon(t^* + \tau) \leq \int_0^\tau [L|V(\varphi(t^* + s, x)) - h_\varepsilon(t^* + s)|] ds - \tau\varepsilon.$$

Weil $V(\varphi(t^*, x)) = h_\varepsilon(t^*)$ impliziert die Stetigkeit, dass es $\tau^{**} > 0$ gibt mit

$$L |V(\varphi(t^* + \tau, x)) - h_\varepsilon(t^* + \tau)| \leq \varepsilon/2$$

für alle $\tau \in [0, \tau^{**}]$. Daher

$$V(\varphi(t^* + \tau, x)) - h_\varepsilon(t^* + \tau) \leq -\tau\varepsilon/2 < 0$$

für alle $\tau \in [0, \tau^{**}]$, und

$$V(\varphi(t^* + \tau)) < h_\varepsilon(t^* + \tau) \text{ für alle } \tau \in [0, \tau^{**}].$$

Dies widerspricht der Definition von t^* und (3.13) folgt. Weil g strikt positiv auf jedem kompakten Intervall ist, gilt $\mu(t, r) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$, also ist μ eine \mathcal{L} -Funktion in t . Weil sich Lösungen von (3.12) nicht schneiden können und $\mu(0, r)$ strikt monoton in r ist, ist auch $\mu(t, r)$ strikt monoton in r , also eine \mathcal{K} -Funktion in r . Daher ist β definiert in (3.11) eine \mathcal{KL} -Funktion. Nun folgt die asymptotische Stabilität aus

$$\|\varphi(t, x)\| \leq \alpha_1^{-1}(V(\varphi(t, x))) \leq \alpha_1^{-1}(\mu(t, V(x))) \leq \alpha_1^{-1}(\mu(t, \alpha_2(\|x\|))) = \beta(\|x\|, t).$$

■

Wir illustrieren das Konzept von Lyapunov-Funktionen mit zwei Beispielen.

Beispiel 3.14 *Betrachte*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_1(t) - x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) - x_2(t)^3. \end{aligned}$$

Wir behaupten, dass $x^* = 0$ global asymptotisch stabil in \mathbb{R}^2 ist. Sei $V(x) := x_1^2 + x_2^2$. Dann erfüllt V die Ungleichung (3.7) mit $\alpha_1(r) = \alpha_2(r) = r^2$. Ferner gilt

$$DV(x)f(x) = (2x_1, 2x_2) \begin{pmatrix} -x_1 - x_2 \\ x_1 - x_2^3 \end{pmatrix} = -2x_1^2 - 2x_2^4 =: -W(x),$$

also ist V eine globale Lyapunov-Funktion. Darüberhinaus gilt die Ungleichung (3.9) mit

$$g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad g(r) = \begin{cases} r^2 & \text{für } r < 1 \\ r & \text{für } r \geq 1 \end{cases}.$$

In der Tat, nimm zunächst an, dass $x_2^2 \geq 1$. Dann folgt $V(x) \geq 1$ und $x_2^2 \leq x_2^4$ und daher, wie behauptet,

$$DV(x)f(x) = -2x_1^2 - 2x_2^4 \leq -2x_1^2 - 2x_2^2 = -2V(x) < -V(x) = -g(V(x)).$$

Ist $\|x\| < 1$, so gilt $x_2^2 \leq 1$ und $x_1^2 \leq 1$ und daher

$$-2x_1^2 - 2x_2^4 \leq -x_1^2 - x_1^2x_2^2 - x_2^4. \quad (3.14)$$

Andererseits ist

$$x_2^2 = \|x\|^2 - x_1^2 \leq 1 - x_1^2 \text{ also } -(1 - x_1^2) \leq -x_2^2,$$

und daher

$$-x_1^2 \leq -x_1^4 - x_1^2 + x_1^4 = -x_1^4 - x_1^2(1 - x_1^2) \leq -x_1^4 - x_1^2x_2^2.$$

Einsetzen in (3.14) liefert

$$\begin{aligned} -2x_1^2 - 2x_2^4 &\leq -x_1^2 - x_1^2x_2^2 - x_2^4 \\ &\leq -x_1^4 - x_1^2x_2^2 - x_1^2x_2^2 - x_2^4 \\ &= -x_1^4 - 2x_1^2x_2^2 - x_2^4 = -V(x)^2 = -g(V(x)). \end{aligned}$$

Es bleibt, den Fall $\|x\| \geq 1$ und $x_2^2 \leq 1$ zu diskutieren. Dann gilt entweder $x_2^2 \leq x_1^2$, also

$$DV(x)f(x) = -2x_1^2 - 2x_2^4 \leq -2x_1^2 \leq -\|x\|^2 = -V(x)$$

oder $x_2^2 > x_1^2$, dann ist $x_2^2 \geq 1/2$ weil andernfalls $\|x\| \geq 1$ unmöglich wäre. Schreibe nun $x_1^2 = kx_2^2$ für ein $k < 1$. Es gilt $\|x\|^2 = (1+k)x_2^2$ und

$$\begin{aligned} DV(x)f(x) &= -2x_1^2 - 2x_2^4 = -2(k+x_2^2)x_2^2 \leq -2(k+\frac{1}{2})x_2^2 \\ &\leq -(k+1)x_2^2 = -\|x\|^2 = -V(x) = -g(V(x)). \end{aligned}$$

Die Hauptschwierigkeit liegt darin, angemessene Kandidaten für Lyapunov-Funktionen zu finden. Meist hilft dabei physikalische Einsicht, wie das Pendel illustriert.

Beispiel 3.15 Wir betrachten das (nichtlineare) Pendel mit Dämpfungskoeffizient $k = 1$,

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(t) &= v(t) \\ \dot{v}(t) &= -v(t) - \sin \varphi(t). \end{aligned}$$

Die Energie dieses Systems nimmt wegen der Dämpfung ab. Als ersten Kandidaten nehmen wir

$$V(\varphi, v) = 1 - \cos \varphi + \frac{1}{2}v^2,$$

also die Summe von potentieller und kinetischer Energie. Diese Funktion fällt entlang von Lösungen, jedoch verschwindet die Ableitung

$$DV(\varphi, v)f(\varphi, v) = (\sin \varphi, v) \begin{bmatrix} v \\ -v - \sin \varphi \end{bmatrix} = v \sin \varphi - v^2 - v \sin \varphi = -v^2,$$

für $v = 0$. Eine Lyapunov-Funktion erhält man durch Addition eines weiteren Terms,

$$V(\varphi, v) = 1 - \cos \varphi + \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{10}v \sin \varphi.$$

Dies ist ebenfalls eine C^1 -Funktion. Um die Positiv-Definitheit nachzuweisen, beachte, dass für $v \in [-\pi, \pi]$ gilt mit $\alpha = \frac{1}{10}$

$$|\alpha v \sin \varphi| \leq \alpha |v\varphi| \leq \frac{\alpha}{2}(\varphi^2 + v^2).$$

Daher ist

$$V(v, \varphi) > 0 \text{ für } \varphi \in [-\pi, \pi].$$

In der Tat: Geometrisch sieht man sofort, dass

$$\cos \varphi \leq 1 - \frac{2\varphi^2}{\pi^2} \text{ für alle } \varphi \in [-\pi, \pi],$$

also

$$V(\varphi, v) = \frac{1}{2}v^2 + (1 - \cos \varphi) + \alpha v \sin \varphi \geq \frac{1}{2}(1 - \alpha)v^2 + \left[\frac{2}{\pi^2} - \frac{\alpha}{2} \right] \varphi^2 > 0.$$

Für die Ableitung in Richtung des Vektorfeldes f gilt

$$\begin{aligned} DV(\varphi, v)f(\varphi, v) &= [\sin \varphi + \alpha v \cos \varphi, v + \alpha \sin \varphi] \begin{bmatrix} v \\ -\sin \varphi - v \end{bmatrix} \\ &= -v^2 + \alpha v^2 \cos \varphi - \alpha \sin^2 \varphi - \alpha v \sin \varphi \\ &\leq -(1 - \alpha)v^2 - \alpha \sin^2 \varphi - \alpha v \sin \varphi \\ &= -[\sin \varphi, v] \begin{bmatrix} \alpha & \frac{\alpha}{2} \\ \frac{\alpha}{2} & 1 - \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \varphi \\ v \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Für die Determinante und die Spur ergibt sich wegen $\alpha = \frac{1}{10}$

$$\det \begin{bmatrix} \alpha & \frac{\alpha}{2} \\ \frac{\alpha}{2} & 1 - \alpha \end{bmatrix} = \alpha - \frac{5}{4}\alpha^2 > 0 \text{ und } \text{Spur} \begin{bmatrix} \alpha & \frac{\alpha}{2} \\ \frac{\alpha}{2} & 1 - \alpha \end{bmatrix} = 1 > 0.$$

Die Determinante ist das Produkt der Eigenwerte, die Spur die Summe der Eigenwerte. Sind die Determinante und die Spur dieser zwei-dimensionalen symmetrischen, also diagonalisierbaren Matrix positiv, so sind die beiden reellen Eigenwerte positiv. Die Matrix ist daher positiv definit.

Während der Beweis von Theorem 3.13 recht gradlinig erfolgt, ist die Umkehrung, die die Konstruktion einer Lyapunov-Funktion erfordert, schwieriger. Wir werden dazu einige Resultate aus der Literatur verwenden.

Theorem 3.16 *Betrachte die Differentialgleichung (3.3) mit $f(0) = 0$. Ist das Gleichgewicht $x^* = 0$ lokal (global) asymptotisch stabil, so existiert eine lokale (globale) Lyapunov-Funktion V .*

Für den Beweis benötigen wir einige Vorbereitungen. Das nächste Lemma zeigt, dass man \mathcal{KL} -Funktionen vereinfachen kann.

Lemma 3.17 *Für jedes $\beta \in \mathcal{KL}$ gibt es $\alpha \in \mathcal{K}_\infty$, so dass*

$$\alpha(\beta(r, t)) \leq e^{-t}r \text{ für alle } r \in [0, 1] \text{ und } t > 0.$$

Beweis. Definiere $g : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ durch

$$g(q) = \max\{\beta(r, -\ln(s)) \mid r \in [0, 1], s \in (0, 1], sr = q\}.$$

Es seien $r^*(q)$ und $s^*(q)$ die Werte, in denen das Maximum angenommen wird.

Behauptung: Die Funktion g ist stetig und strikt wachsend mit $\lim_{q \searrow 0} g(q) = 0$.

In der Tat, für $0 < q_1 < q_2 \leq 1$ betrachte $r_1 = r^*(q_1)$ und $s_1 = s^*(q_1)$. Definiere

$$r_2 := \begin{cases} 1, & \text{für } \sqrt{\frac{q_2}{q_1}} r_1 > 1 \\ q_2, & \text{für } \sqrt{\frac{q_2}{q_1}} s_1 > 1 \\ \sqrt{\frac{q_2}{q_1}} r_1, & \text{sonst} \end{cases}, \quad s_2 := \begin{cases} q_2, & \text{für } \sqrt{\frac{q_2}{q_1}} r_1 > 1 \\ 1, & \text{für } \sqrt{\frac{q_2}{q_1}} s_1 > 1 \\ \sqrt{\frac{q_2}{q_1}} s_1, & \text{sonst} \end{cases}.$$

In allen drei Fällen ist $r_2 \in (0, 1]$, $s_2 \in (0, 1]$, $r_2 s_2 = q_2$, $r_1 \leq r_2$ und $s_1 \leq s_2$ (und daher $-\ln(s_2) \leq -\ln(s_1)$). In den ersten beiden Fällen gilt auch $s_1 < s_2$ und daher $-\ln(s_2) < -\ln(s_1)$. Dies impliziert

$$g(q_2) \geq \beta(r_2, -\ln(s_2)) \geq \beta(r_1, -\ln(s_2)) > \beta(r_1, -\ln(s_1)) = g(q_1)$$

In den letzten beiden Fällen ist $r_1 < r_2$ und daher

$$g(q_2) \geq \beta(r_2, -\ln(s_2)) \geq \beta(r_2, -\ln(s_1)) > \beta(r_1, -\ln(s_1)) = g(q_1).$$

Dies zeigt die strikte Monotonie. Für die Stetigkeit wähle $q_0 \in (0, 1]$ und betrachte $q_i \rightarrow q_0$. Definiere $r_i := r^*(q_i)$ und $s_i := s^*(q_i)$ für $i = 0, 1, 2, \dots$. Die gleiche Konstruktion wie oben zeigt, dass es für jedes $i \in \mathbb{N}$ Zahlen \tilde{r}_i und \tilde{s}_i sowie \bar{r}_i und \bar{s}_i gibt mit

$$\tilde{r}_i \tilde{s}_i = q_i, \quad |\tilde{r}_i - r_0| \leq \left|1 - \sqrt{\frac{q_i}{q_0}}\right| \quad \text{und} \quad |\tilde{s}_i - s_0| \leq \left|1 - \sqrt{\frac{q_i}{q_0}}\right|$$

und

$$\bar{r}_i \bar{s}_i = q_0, \quad |\bar{r}_i - r_0| \leq \left|1 - \sqrt{\frac{q_i}{q_0}}\right| M \quad \text{und} \quad |\bar{s}_i - s_0| \leq \left|1 - \sqrt{\frac{q_i}{q_0}}\right|.$$

Insbesondere $\tilde{r}_i \rightarrow r_0$, $\tilde{s}_i \rightarrow s_0$, $\bar{r}_i \rightarrow r_0$ und $\bar{s}_i \rightarrow s_0$ für $i \rightarrow \infty$. Daher implizieren die Stetigkeit von β und des Logarithmus die gewünschte Stetigkeit, weil

$$g(q_0) - g(q_i) \leq \beta(r_0, -\ln(s_0)) - \beta(\tilde{r}_i, -\ln(\tilde{s}_i)) \rightarrow 0 \quad \text{für } i \rightarrow \infty$$

und

$$g(q_i) - g(q_0) \leq \beta(r_i, -\ln(s_i)) - \beta(\bar{r}_i, -\ln(\bar{s}_i)) \rightarrow 0 \quad \text{für } i \rightarrow \infty,$$

Schließlich beweisen wir $\lim_{q \rightarrow 0, q > 0} g(q) = 0$. Beachte, dass für jedes $(r, s) \in [0, 1]^2$ mit $rs = q$ entweder $s \leq \sqrt{q}$ oder $r \leq \sqrt{q}$ gilt, weil andernfalls $rs > \sqrt{q}$ oder $\sqrt{q} = q$. Daher gilt entweder

$$g(q) \leq \beta(\sqrt{q}, -\ln(s)) \leq \beta(\sqrt{q}, 0) \rightarrow 0 \quad \text{für } q \rightarrow 0$$

oder

$$g(q) \leq \beta(r, -\ln(\sqrt{q})) \leq \beta(1, \sqrt{q}) \rightarrow 0 \quad \text{für } q \rightarrow 0,$$

Dies zeigt die behauptete Konvergenz und vervollständigt damit den Beweis der **Behauptung**. Definiere jetzt $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ durch

$$h(q) := \begin{cases} 0, & \text{für } q = 0 \\ g(q), & \text{für } q \in (0, 1] \\ g(1) + q - 1, & \text{für } q > 1 \end{cases}$$

Wegen der Eigenschaften von g ist dies eine \mathcal{K}_∞ -Funktion und

$$h(rs) \geq \beta(r, -\ln(s)) \text{ für alle } r \in [0, 1], s \in (0, 1].$$

Mit $\alpha := h^{-1} \in \mathcal{K}_\infty$ findet man

$$rs \geq \alpha(\beta(r, -\ln(s))) \text{ für alle } r \in [0, 1], s \in (0, 1]$$

und mit $t = -\ln(s)$, d.h., $s = e^{-t}$, folgt

$$re^{-t} \geq \alpha(\beta(r, t)) \text{ für alle } r \in [0, 1], t \geq 0.$$

■

Wir benötigen zwei Resultate, die wir nur aus der Literatur zitieren. Das erste Theorem von Rademacher sagt, dass eine Lipschitz-stetige Funktion auf einer dichten Teilmenge differenzierbar ist.

Theorem 3.18 *Betrachte eine Lipschitz-stetige Funktion $V : O \rightarrow \mathbb{R}$, definiert auf einer offenen Menge $O \subset \mathbb{R}^n$. Dann gibt es in jeder offenen Menge $H \subset O$ einen Punkt $x \in H$ in dem V differenzierbar ist.*

Für den Beweis von Theorem 3.18 siehe das Buch “Measure Theory and Fine Properties of Functions” von L.C. Evans and F. Gariepy [2, Theorem 2, Section 3.1.2]. Das zweite zitierte Resultat zeigt, dass Lipschitz-stetige Funktionen durch glatte Funktionen approximiert werden können.

Theorem 3.19 *Betrachte die Differentialgleichung (3.3) und eine Lipschitz-stetige Funktion $\tilde{V} : O \rightarrow \mathbb{R}$, definiert auf einer offenen Menge $O \subset \mathbb{R}^n$. Dann gibt es für alle stetigen Funktionen $\gamma, \delta : O \rightarrow (0, \infty)$ eine unendlich oft differenzierbare Funktion $V : O \rightarrow \mathbb{R}$ mit*

$$\left| V(x) - \tilde{V}(x) \right| \leq \gamma(x)$$

für alle $x \in O$ und

$$DV(x)f(x) \leq D\tilde{V}(x) + \delta(x)$$

für alle $x \in O$, in denen \tilde{V} differenzierbar ist.

Die ursprüngliche Version von Theorem 3.19 findet sich in dem Artikel [15] von F.W. Wilson; die hier angegebene Version stammt aus dem Artikel [9, Appendix] von Y. Lin, E.D. Sontag and Y. Wang.

Beweis. (von Theorem 3.16) Wir beweisen nur den globalen Fall, der lokale ist ähnlich, aber technisch aufwändiger. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $\|f(x)\| \leq 1$; andernfalls ersetzen wir f durch $f/\sqrt{1 + \|f\|_\infty^2}$. In der Tat, die asymptotische Stabilität bleibt bei dieser Transformation erhalten, und eine Lyapunov-Funktion V für das geänderte f ist, mit

derselben Funktion W , auch eine Lyapunov-Funktion für das ursprüngliche f . Betrachte $\beta \in \mathcal{KL}$ aus der asymptotischen Stabilität und α aus Lemma 3.17. Wir können annehmen, dass $\beta(1, 0) \geq 1$ und $\alpha(r) \leq 1$ für $r \leq \beta(1, 0)$. Sei L eine Lipschitz-Konstante für f und alle x mit $\|x\| \leq \beta(1, 0)$. Wir definieren $\omega : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ durch

$$\omega(r) = \frac{1}{\beta(1, 0)} \int_0^r \alpha(s)^{L+1} ds \text{ für } r \in [0, \beta(1, 0)]$$

und $\omega(r) = \omega(\beta(1, 0))$ für $r > \beta(1, 0)$. Dann folgt

$$\omega(r) \leq \alpha(r) \text{ and } \omega'(r) \leq \alpha(r)^{L+1} \text{ for } r \in [0, \beta(1, 0)].$$

Insbesondere ist ω Lipschitz-stetig mit einer Konstante $L_R = \alpha(R)^{L+1}$ auf $[0, R]$ für jedes $R \in [0, \beta(1, 0)]$ und global Lipschitz-stetig mit Konstante $L_{\beta(1, 0)}$. Definiere $\tilde{W}(x) = \omega(\|x\|)$. Dann hat \tilde{W} dieselben Lipschitz-Konstanten wie ω .

Lemma 3.20 *Die Funktion*

$$\tilde{V}(x) := \int_0^\infty \tilde{W}(\varphi(t, x)) dt$$

hat die folgenden Eigenschaften:

(i) Es gibt $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2 \in \mathcal{K}_\infty$ mit

$$\tilde{\alpha}_1(\|x\|) \leq \tilde{V}(x) \leq \tilde{\alpha}_2(\|x\|).$$

(ii) \tilde{V} ist Lipschitz-stetig.

(iii) In jedem $x \in \mathbb{R}^n$, in dem \tilde{V} differenzierbar ist, gilt

$$D\tilde{V}(x)f(x) \leq -\tilde{W}(x).$$

Beweis. (i) Wir zeigen zunächst die Existenz von $\tilde{\alpha}_2$. Sei $\tau(x) := \inf\{t \geq 0 \mid \|\varphi(t, x)\| \leq 1\}$ und $\sigma(r) := \inf\{t \geq 0 \mid \beta(r, t) \leq 1\}$. Dann ist $\tau(x) \leq \sigma(\|x\|)$. Für $\|x\| > 1$ ist $\tau(x) > 0$ und daher

$$\begin{aligned} \tilde{V}(x) &= \int_0^{\tau(x)} \tilde{W}(\varphi(t, x)) dt + \int_{\tau(x)}^\infty \tilde{W}(\varphi(t, x)) dt \\ &\leq \tau(x)\omega(\beta(1, 0)) + \int_{\tau(x)}^\infty \omega(\|\varphi(t, x)\|) dt \end{aligned}$$

Nun ist

$$\omega(\|\varphi(t, x)\|) \leq \alpha(\|\varphi(t, x)\|) = \alpha(\|\varphi(t - \tau(x), \varphi(\tau(x), x))\|) \leq \alpha(\beta(1, t - \tau(x)))$$

und daher ist der obige Ausdruck

$$\begin{aligned} &\leq \tau(x)\omega(\beta(1, 0)) + \int_0^\infty \alpha(\beta(1, t - \tau(x))) dt \\ &\leq \sigma(\|x\|) \omega(\beta(1, 0)) + \int_0^\infty e^{-t} dt \\ &= \sigma(\|x\|) \omega(\beta(1, 0)) + 1 \\ &\leq \sigma(\|x\|) \omega(\beta(1, 0)) + \|x\| =: \tilde{\alpha}_2(\|x\|). \end{aligned}$$

Beachte, dass $\sigma(r)$ wachsend ist mit $\sigma(0) = 0$, also $\tilde{\alpha}_2 \in \mathcal{K}_\infty$. Ist $\|x\| < 1$, so folgt

$$\tilde{V}(x) = \int_0^\infty \tilde{W}(\varphi(t, x)) dt \leq \int_0^\infty \alpha(\beta(\|x\|, t)) dt \leq \int_0^\infty e^{-t} \|x\| dt = \|x\| \leq \tilde{\alpha}_2(\|x\|).$$

Die Existenz von $\tilde{\alpha}_1$ sieht man folgendermaßen: Die Lipschitz-Stetigkeit von f impliziert

$$\|\varphi(\tau(x) + t, x)\| \geq e^{-Lt} \|\varphi(\tau(x), x)\|$$

for $\|x\| \leq 1$. Weil f global beschränkt ist, muss die Zeit $\tau(x)$ gegen ∞ gehen, wenn $\|x\|$ gegen ∞ geht. Diese beiden Eigenschaften liefern, mit ähnlichen Integral-Abschätzungen wie oben, und einer unteren Schranke für \tilde{W} die untere Schranke $\tilde{\alpha}_1$ für \tilde{V} .

(ii): Zunächst gilt für $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\|, \|y\| \leq 1$ mit Gronwalls Lemma

$$\|\varphi(t, x) - \varphi(t, y)\| \leq e^{Lt} \|x - y\|.$$

Mit

$$\delta(t) := \max\{\|\varphi(t, x)\|, \|\varphi(t, y)\|\} \leq \beta(\max\{\|x\|, \|y\|\}, t)$$

findet man für diese x und y die Lipschitz-Abschätzung

$$\begin{aligned} |\tilde{V}(x) - \tilde{V}(y)| &\leq \int_0^\infty |\tilde{W}(\varphi(t, x)) - \tilde{W}(\varphi(t, y))| dt \\ &\leq \int_0^\infty L_{\delta(t)} \|\varphi(t, x) - \varphi(t, y)\| dt \\ &\leq \int_0^\infty \alpha(\delta(t))^{L+1} e^{Lt} \|x - y\| dt \\ &\leq \int_0^\infty \alpha(\beta(\max\{\|x\|, \|y\|\}, t))^{L+1} e^{Lt} \|x - y\| dt \\ &\leq \int_0^\infty e^{-(L+1)t} \max\{\|x\|, \|y\|\}^{L+1} e^{Lt} \|x - y\| dt \\ &\leq \|x - y\| \max\{\|x\|, \|y\|\}^{L+1} \int_0^\infty e^{-t} e^{Lt} dt \\ &= \|x - y\| \max\{\|x\|, \|y\|\}^{L+1} \leq \|x - y\|. \end{aligned}$$

Seien jetzt $x, y \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Definiere $M = \max\{\|x\|, \|y\|\}$ und L_M sei eine Lipschitz-Konstante für f auf der Kugel $B_{\beta(M, 0)}$. Gronwalls Lemma impliziert

$$\|\varphi(t, x) - \varphi(t, y)\| \leq e^{L_M t} \|x - y\|.$$

Nun folgt die Lipschitz-Stetigkeit, unter Verwendung der obigen Abschätzung,

aus

$$\begin{aligned}
& \left| \tilde{V}(x) - \tilde{V}(y) \right| \\
& \leq \int_0^{\sigma(M)} \left| \tilde{W}(\varphi(t, x)) - \tilde{W}(\varphi(t, y)) \right| dt \\
& + \int_{\sigma(M)}^{\infty} \left| \tilde{W}(\varphi(t, \varphi(\sigma(M), x))) - \tilde{W}(\varphi(t, \varphi(\sigma(M), y))) \right| dt \\
& \leq \int_0^{\sigma(M)} L_W e^{L_M t} \|x - y\| dt + \left| \tilde{V}(\varphi(\sigma(M), x)) - \tilde{V}(\varphi(\sigma(M), y)) \right| \\
& \leq \int_0^{\sigma(M)} L_W e^{L_M t} \|x - y\| dt + \|\varphi(\sigma(M), x) - \varphi(\sigma(M), y)\| \\
& \leq \frac{L_W}{L_M} \left[e^{L_M \sigma(M)} - 1 \right] \|x - y\| + \left[e^{L_M \sigma(M)} - 1 \right] \|x - y\| =: L_{V,M} \|x - y\|.
\end{aligned}$$

(iii) Die Definition von \tilde{V} impliziert

$$\tilde{V}(\varphi(\tau, x)) - \tilde{V}(x) \leq - \int_0^{\tau} \tilde{W}(\varphi(t, x)) dt,$$

woraus durch Differentiation in $\tau = 0$ die Behauptung folgt. ■

Wir wenden jetzt Theorem 3.19 über glatte Approximationen an mit

$$O = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \gamma(x) = \min\{\tilde{\alpha}_1(\|x\|), \tilde{\alpha}_2(\|x\|)\}/2 \text{ und } \delta(x) = \tilde{W}(x)/2.$$

Mit $\alpha_1(r) = \tilde{\alpha}_1(r)/2$ und $\alpha_2(r) = 3\tilde{\alpha}_2(r)/2$ erhalten wir also eine unendlich oft differenzierbare Funktion mit

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|).$$

Mit $W(x) = \tilde{W}(x)/2$ erhält man für alle Punkte, an denen \tilde{V} differenzierbar ist, die Ungleichung

$$DV(x)f(x) \leq -W(x).$$

Jetzt sei x ein Punkt, in dem \tilde{V} nicht differenzierbar ist. Nach Rademachers Theorem, Theorem 3.18, gibt es in jeder Umgebung $B_{\frac{1}{n}}(x)$, $n \in \mathbb{N}$, einen Punkt x_n , in dem \tilde{V} differenzierbar ist. Weil $x_n \rightarrow x$ für $n \rightarrow \infty$ und DV , f und W stetig sind, erhält man

$$DV(x)f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} DV(x_n)f(x_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} -W(x_n) = -W(x),$$

wie behauptet. Damit ist der Beweis von Theorem 3.16 abgeschlossen. ■

3.4 ISS für Kaskaden

In diesem Abschnitt kehren wir zurück zu Kontrollsystemen und Input-to-State-Stabilität, siehe Definition 3.2. Wir konstruieren hierfür Lyapunov-Funktionen und zeigen, wie man aus der ISS von Teilsystemen auf ISS des Gesamtsystems schließen kann. Hierzu brauchen wir zunächst das folgende Resultat.

Theorem 3.21 *Ein System (3.1) ist genau dann global Input-to-State stabil, wenn eine Funktion $V \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+)$, stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, sowie Funktionen $\alpha_1, \alpha_2, \sigma, \chi \in \mathcal{K}_\infty$ existieren mit*

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|)$$

und

$$DV(x)f(x, w) \leq -\sigma(\|x\|)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n, w \in W$ mit $\|x\| \geq \chi(\|w\|)$. Die Funktion V heißt dann ISS-Lyapunov-Funktion.

Beweis. (Skizze) Wir skizzieren den Existenzbeweis für V : Zunächst zeigt man, dass aus der ISS-Eigenschaft folgt, dass eine \mathcal{K}_∞ -Funktion δ existiert, so dass für jede Abbildung $k: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow W$ mit $\|k(x, t)\| \leq \delta(\|x\|)$ für alle $t \geq 0$ die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = f(x(t), k(t, x(t)))$$

asymptotisch stabil ist mit einer Attraktionsrate in \mathcal{KL} , die unabhängig von der Wahl von k ist. Nun verwendet man einen Satz über die Existenz von Lyapunov-Funktionen für gestörte Differentialgleichungen und erhält so eine differenzierbare Lyapunov-Funktion V mit

$$DV(x)f(x, k(t, x)) \leq \beta_1(\|x\|, t)$$

für ein $\beta_1 \in \mathcal{KL}$ und alle k mit der obigen Schranke. Daraus folgt

$$DV(x)f(x, w) \leq \alpha_3(\|x\|)$$

falls $\|w\| \leq \delta(\|x\|)$. Hieraus folgt die Behauptung mit $\chi = \delta^{-1}$. ■

Der ausführliche Beweis findet sich in der Arbeit “On characterizations of the input-to-state stability property” von E. Sontag und Y. Wang, *Systems and Control Letters* 1995, pp. 351-359 [13]. Beachte, dass $\sigma(\|x\|)$ hier die Rolle des Terms $W(x)$ spielt, den wir bisher in der Definition der Lyapunov-Funktionen verwendet haben.

Das folgende Lemma bietet eine alternative Darstellung der ISS-Lyapunov-Funktion.

Lemma 3.22 *Für eine Funktion $V \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \mathbb{R}_+)$ sind die folgenden zwei Eigenschaften äquivalent:*

(i) Es existieren $\sigma, \chi \in \mathcal{K}_\infty$ mit

$$DV(x)f(x, w) \leq -\sigma(\|x\|) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n, w \in W \text{ mit } \|x\| \geq \chi(\|w\|).$$

(ii) Es existieren $\alpha_3, \alpha_4 \in \mathcal{K}_\infty$ mit

$$DV(x)f(x, w) \leq -\alpha_3(\|x\|) + \alpha_4(\|w\|) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n, w \in W.$$

Beweis: Übungsaufgabe.

Hinweis: Für die Richtung „(i) \Rightarrow (ii)” beweist man zunächst, dass mit

$$\hat{\alpha}_4(t) = \max\{0, DV(x)f(x, w) + \sigma(\|x\|) \mid \|x\| \leq \chi(r), \|w\| \leq r\}$$

die Ungleichung in (ii) für $\alpha_3 = \sigma$ und $\hat{\alpha}_4$ an Stelle von α_4 erfüllt ist. Dann beweist man, dass $\hat{\alpha}_4$ durch eine \mathcal{K}_∞ -Funktion α_4 nach oben abgeschätzt werden kann.

Mit Hilfe der ISS-Lyapunov-Funktionen können wir das folgende Resultat über sogenannte Kaskaden gestörter Systeme beweisen.

Theorem 3.23 *Betrachte die gestörten Systeme*

$$\dot{y}(t) = g(y(t), v(t)), \dot{z}(t) = h(z(t), w(t)) \quad (3.15)$$

mit Zuständen $y \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}^m$ und Störungen $v \in \mathbb{R}^m, w \in \mathbb{R}^\ell$ und das zugehörige gekoppelte System gegeben durch

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = f(x(t), w(t)) := \begin{pmatrix} g(y(t), z(t)) \\ h(z(t), w(t)) \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Dann gilt: Falls jedes der beiden Systeme (3.15) global ISS ist, so ist auch (3.16) global ISS.

Beweis. Da beide Systeme (3.15) ISS sind, existieren nach Theorem 3.21 und Lemma 3.22 ISS Lyapunov-Funktionen V^g, V^h und $\alpha_3^g, \alpha_4^g, \alpha_3^h, \alpha_4^h \in \mathcal{K}_\infty$ mit

$$DV^g(y)g(y, v) \leq -\alpha_3^g(\|y\|) + \alpha_4^g(\|v\|) \text{ und } DV^h(z)h(z, w) \leq -\alpha_3^h(\|z\|) + \alpha_4^h(\|w\|).$$

Durch eine geeignete Reskalierung, nämlich V^g ersetzt durch $\rho^g(V^g)$ und V^h ersetzt durch $\rho^h(V^h)$ mit $\rho^g, \rho^h \in \mathcal{K}_\infty$, können wir o.B.d.A. annehmen, dass

$$\alpha_3^h(r) \geq 2\alpha_4^g(r), \quad r \geq 0.$$

Für einen Beweis siehe das Korollar in Abschnitt I in der Arbeit “Changing supply functions in input/state stable systems” von E. Sontag and A. Teel, IEEE Transactions on Automatic Control, 40 (1995), pp. 1476–1478 [11]. Setzen wir nun $V(x) := V^g(y) + V^h(z)$, so erhält man die Beschränktheit von V nach oben und unten durch

$$\alpha_2(r) = \alpha_2^g(r) + \alpha_2^h(r),$$

also

$$\begin{aligned} V(y, z) &= V^g(y) + V^h(z) \leq \alpha_2^g(\|y\|) + \alpha_2^h(\|z\|) \\ &\leq \alpha_2^g(\|(y, z)\|) + \alpha_2^h(\|(y, z)\|) = \alpha_2(\|(y, z)\|), \end{aligned}$$

und die Abschätzung nach unten durch

$$V(y, z) = V^g(y) + V^h(z) \geq \alpha_2^g(\|y\|) + \alpha_2^h(\|z\|) =: \alpha_1(\|(y, z)\|),$$

mit

$$\alpha_1(r) := \min\{\alpha_1^g(\|y\|) + \alpha_1^h(\|z\|) \mid \|(y, z)\| = r\}.$$

Ferner

$$\begin{aligned} (DV(x)f(x, w)) &= DV^g(y)g(y, z) + DV^h(z)h(z, w) \\ &\leq -\alpha_3^g(\|y\|) + \alpha_4^g(\|z\|) - \alpha_3^h(\|z\|) + \alpha_4^h(\|w\|) \\ &\leq -\alpha_3^g(\|y\|) - \alpha_4^g(\|z\|) + \alpha_4^h(\|w\|). \end{aligned}$$

Definieren wir

$$\alpha_3(r) := \min\{\alpha_3^g(\|y\|) + \alpha_4^g(\|z\|) \mid \|(y, z)\| = r\},$$

so sieht man leicht, dass dies eine \mathcal{K}_∞ -Funktion ist, die die Ungleichung

$$\alpha_3(\|x\|) \leq \alpha_3^g(\|y\|) + \alpha_4^g(\|z\|)$$

erfüllt. Also folgt

$$DV(x)f(x, w) \leq -\alpha_3(\|x\|) + \alpha_4^h(\|w\|),$$

weswegen V eine ISS-Lyapunov-Funktion für (3.16) ist. Damit folgt ISS. ■

Korollar 3.24 *Betrachte die Systeme*

$$\dot{y}(t) = g(y(t), v(t)), \dot{z}(t) = h(z(t)) \quad (3.17)$$

mit Zuständen $y \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}^m$ und Störung $v \in \mathbb{R}^m$, und das zugehörige gekoppelte System mit $x = (y, z) \in \mathbb{R}^{n+m}$ und (trivialer) Störung $w \in \mathbb{R}^l$ gegeben durch

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = f(x(t), w(t)) := \begin{bmatrix} g(y(t), z(t)) \\ h(z(t)) \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Dann gilt: Falls das y -System global ISS und das z -System global asymptotisch stabil ist, so ist (3.18) global asymptotisch stabil.

Beweis. Wir können das z -System durch Addition von $0 \cdot w$ zu einem gestörten System erweitern, Aus der globalen asymptotischen Stabilität des Systems folgt, dass dieses (formal) gestörte System global ISS ist. Die Anwendung des obigen Satzes liefert dann globale ISS. ■

Beispiel 3.25 *Betrachte das Kontrollsystem*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 x_3 \\ \dot{x}_2 &= u_1(t) \\ \dot{x}_3 &= u_2(t) \end{aligned}$$

Dann stabilisiert das Feedback

$$F(x) = \begin{bmatrix} -x_1 - x_2 - x_2 x_3 \\ -x_3 + x_1^2 + 2x_1 x_2 x_3 \end{bmatrix}$$

das System global. In der Tat, das closed-loop System ist gerade gegeben durch

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 x_3 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 - x_2 x_3 \\ \dot{x}_3 &= -x_3 + x_1^2 + 2x_1 x_2 x_3 \end{aligned}$$

Wir führen eine Koordinatentransformation $\hat{x} = \Psi(x)$ durch mit

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1 = x_1 \\ \hat{x}_2 = x_1 + x_2 \\ \hat{x}_3 = x_3 - x_1^2 \end{bmatrix} \text{ aus, also } \Psi^{-1}(\hat{x}) = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 - \hat{x}_1 \\ \hat{x}_3 + \hat{x}_1^2 \end{bmatrix}.$$

Dann ist die Jacobi-Matrix

$$D\Psi(\Psi^{-1}(\hat{x})) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2\hat{x}_1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

und das transformierte System ergibt sich vermöge der üblichen Vektorfeld-Transformation $\hat{f}(\hat{x}) = D\Psi(\Psi^{-1}(\hat{x}))f(\Psi^{-1}(\hat{x}))$ (nach der Kettenregel) zu

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{x}_1 &= -\hat{x}_2\hat{x}_3 + \hat{x}_2\hat{x}_1^2 - \hat{x}_2\hat{x}_3 + \hat{x}_1^3 \\ \frac{d}{dt}\hat{x}_2 &= -\hat{x}_2 \\ \frac{d}{dt}\hat{x}_3 &= -\hat{x}_3. \end{aligned}$$

Nun rechnet man nach, dass Korollar 3.24 mit $y = \hat{x}_1$ und $z = (\hat{x}_2, \hat{x}_3)$ anwendbar ist, wodurch asymptotische Stabilität für das transformierte System folgt, die sich auf das System in den Originalkoordinaten überträgt. (Übungsaufgabe)

Dieses Beispiel illustriert, wie ISS für Kontrollsysteme angewendet wird: Man sucht Feedbacks, so dass das rückgekoppelte System (oder Teilsysteme davon) die ISS-Eigenschaft hat. Dies erlaubt es gegebenenfalls, aus der ISS Eigenschaft von Teilsystemen auf die asymptotische Stabilität des Gesamtsystems zu schließen.

3.5 Kontroll-Lyapunovfunktionen

Wir werden den Begriff der asymptotischen Stabilität für Differentialgleichungen auf Kontrollsysteme verallgemeinern. Hierbei gibt es im Wesentlichen zwei Möglichkeiten: Die erste ist asymptotische Kontrollierbarkeit, bei der wir Konvergenz zum Gleichgewicht für eine geeignete Kontrolle u verlangen, die vom Anfangswert abhängen darf; vgl. Vorlesungsskript Kontrolltheorie, WS 2014/15, Abschnitt 4.5. Die andere Möglichkeit ist, dies für alle u zu verlangen.

Wir erinnern daran, dass die L_∞ -Norm gegeben ist durch

$$\|u\|_\infty := \inf\{C \geq 0 \mid \|u(t)\| \leq C \text{ für fast alle } t \in \mathbb{R}\}.$$

Ein Punkt x^* ist ein Gleichgewicht des Kontrollsystems

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{3.19}$$

wenn es $u^* \in U$ gibt mit

$$f(x^*, u^*) = 0. \tag{3.20}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $u^* = 0$.

Definition 3.26 Ein Gleichgewicht $x^* \in \mathbb{R}^n$ des Kontrollsystems (3.19) ist lokal asymptotisch kontrollierbar, falls es eine Umgebung N von x^* , eine stetige, nichtfallende Funktion $\delta: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ und eine Funktion $\beta \in \mathcal{KL}$ gibt, so dass es für alle $x \in N$ ein $u_x \in U$ gibt mit $\|u_x\|_\infty \leq \delta(\|x - x^*\|)$ und

$$\|\varphi(t, x, u_x) - x^*\| \leq \beta(\|x - x^*\|, t) \text{ für alle } t \geq 0.$$

Gelten diese Bedingungen mit $N = \mathbb{R}^n$, so heißt x^* global asymptotisch kontrollierbar.

Bemerkung 3.27 Ist N beschränkt, so können wir $\delta(\|x - x^*\|)$ durch die Konstante $C = \sup_{x \in N} \delta(\|x - x^*\|)$ ersetzen. Deswegen ist die Vergleichsfunktion δ hauptsächlich für den globalen Fall relevant, in dem wir große Kontrollwerte für Anfangswerte fern von x^* wählen.

Wie im Fall der asymptotischen Stabilität werden wir im Allgemeinen $x^* = 0$ nehmen. Wir erinnern auch an das zugehörige closed-loop Konzept.

Definition 3.28 Gegeben sei das Kontrollsystem (3.19). Eine Abbildung $F : \mathbb{R}^n \rightarrow U$ heißt (Zustands-) Feedback. Die zugehörige Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = f_F(x(t)) \text{ mit } f_F(x) = f(x, F(x)), \quad (3.21)$$

ist das zugehörige closed-loop oder Feedback-System. Die Lösungen werden mit $\varphi(t, x, F)$ bezeichnet.

Man beachte, dass im Allgemeinen keine Lösungen der Feedback-Gleichung existieren müssen, wenn wir keine Bedingungen an F stellen. Jetzt werden wir eine weitere Verallgemeinerung der asymptotischen Stabilität formulieren.

Definition 3.29 Ein Gleichgewicht $x^* \in \mathbb{R}^n$ des Kontrollsystems (3.19) ist (lokal oder global) stabilisierbar durch ein stetiges Feedback F , falls es eine stetige Abbildung $F : \mathbb{R}^n \rightarrow U$ gibt, so dass das Feedback-System (lokal oder global) asymptotisch stabil ist.

Ist f_F nicht Lipschitz-stetig, so kann mehr als eine Lösung zu einem Anfangswert existieren. In diesem Fall verlangen wir, dass alle Lösungen die Bedingungen der asymptotischen Stabilität erfüllen.

Es ist fast trivial zu zeigen, dass Feedback-Stabilisierbarkeit die asymptotische Kontrollierbarkeit impliziert.

Theorem 3.30 Das Gleichgewicht $x^* = 0 \in \mathbb{R}^n$ des Kontrollsystems (3.19) sei lokal (global) Feedback-stabilisierbar. Dann ist es auch lokal (global) asymptotisch kontrollierbar.

Beweis. Wegen der asymptotischen Stabilität gibt es eine \mathcal{KL} -Funktion β mit

$$\|\varphi(t, x, F)\| \leq \beta(\|x\|, t) \quad (3.22)$$

für alle $x \in N$ und alle $t \geq 0$. Definiere eine stetige und nichtfallende Funktion δ durch

$$\delta(r) := \max\{\|F(x)\| \mid \|x\| \leq \beta(r, 0)\}.$$

Für $x \in N$ wähle

$$u_x(t) = F(\varphi(t, x, F))$$

für eine Lösung von (3.21). Weil F und $\varphi(t, x, F)$ stetig sind, ist auch u_x stetig und daher integrierbar. Für die zugehörige Lösung $\varphi(t, x, u_x)$ von (3.19) erhält man

$$\varphi(t, x, u_x) = x + \int_0^t f(\varphi(\tau, x, u_x), u_x(\tau)) d\tau.$$

Wegen

$$\begin{aligned}\varphi(t, x, F) &= x + \int_0^t f_F(\varphi(\tau, x, F)) d\tau \\ &= x + \int_0^t f(\varphi(\tau, x, F), F(\varphi(\tau, x, F))) d\tau \\ &= x + \int_0^t f(\varphi(\tau, x, F), u_x(\tau)) d\tau,\end{aligned}$$

impliziert die Eindeutigkeit der Lösung (für die Gleichung mit u_x), dass $\varphi(t, x, u_x) = \varphi(t, x, F)$ für alle $t \geq 0$. Daher folgt die asymptotische Kontrollierbarkeit aus (3.22). Ferner impliziert die Ungleichung $\|\varphi(t, x, F)\| \leq \beta(\|x\|, 0)$, dass

$$\|F(\varphi(t, x, F))\| \leq \delta(\|x\|)$$

und daher $\|u_x\|_\infty \leq \delta$. ■

Wir werden jetzt ein wichtiges Hilfsmittel für die Stabilitätsanalyse von Kontrollsystemen einführen, die Kontroll-Lyapunovfunktionen.

Definition 3.31 Betrachte das Kontrollsystem (3.19) mit $f(0, 0) = 0$. Eine stetige Funktion $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Kontroll-Lyapunovfunktion, falls $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}^\infty$, eine stetige Funktion $W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, eine stetige, nichtfallende Funktion δ auf \mathbb{R}_+ , eine Umgebung N von 0 und eine Konstante $c > 0$ existieren, so dass $W(x) > 0$ für alle $x \in \text{cl}B$, $V(x) < c$ für alle $x \in N$, $V(x) = c$ für alle $x \in \partial N$ und

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|) \quad (3.23)$$

$$\inf \left\{ V(\varphi(t, x, u)) + \int_0^t W(\varphi(s, x, u)) ds, u \in \mathcal{U} \text{ with } \|u\|_\infty \leq \delta(\|x\|) \right\} \leq V(x) \quad (3.24)$$

für alle $x \in N$ und alle $t > 0$.

Die Funktion V ist eine global Kontroll-Lyapunovfunktion, falls $N = \mathbb{R}^n$ und $V(x) \rightarrow \infty$ für $\|x\| \rightarrow \infty$. Wir nennen (V, W) auch ein Kontroll-Lyapunov-Paar.

Bemerkung 3.32 In Analogie zu Lemma 3.11, können wir annehmen, dass $W(x) = g(V(x))$ für eine Lipschitz-stetige Funktion g auf \mathbb{R}_+ und all $x \in N$ ist.

Bemerkung 3.33 Man beachte, dass (3.24) die Wertefunktion eines optimalen Steuerungsproblems ist. In der Tat gibt es enge Verbindungen zwischen Kontroll-Lyapunovfunktionen und Wertefunktionen von optimalen Kontrollproblemen auf unendlichem Zeitintervall.

Im differenzierbaren Fall erhält man eine Bedingung, die der in der unkontrollierten Situation ähnelt. Sie wird wieder durch Differentiation oder Integration der zugehörigen Ungleichungen bewiesen (mit einigen zusätzlichen technischen Schwierigkeiten wegen des Infimums).

Lemma 3.34 Eine stetige Funktion $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$, die stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist, erfüllt die Bedingung (3.24) genau dann, wenn die Ungleichung

$$\inf \{ DV(x)f(x, u), u \in U \text{ und } \|u\| \leq \delta(\|x\|) \} \leq -W(x) \quad (3.25)$$

für alle $x \in N$ gilt.

Das folgende Beispiel stammt aus Sontag [12, Example 5.7.5].

Beispiel 3.35 Betrachte das System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\sin x_1 + u.\end{aligned}$$

Dies beschreibt ein kontrolliertes Pendel, wobei der Nullpunkt dem oberen Gleichgewicht entspricht. Physikalisch ist die Steuerung eine Kraft (z.B. durch einen Motor), die auf die Winkelgeschwindigkeit wirkt. Die Funktion $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ ist keine Lyapunovfunktion ($\dot{V} = 0$ falls $x_2 = 0$).

Betrachte stattdessen die Funktion

$$V(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2.$$

Sie ist stetig differenzierbar, positiv definit und kann nach oben und nach unten durch \mathcal{K}_∞ -Funktionen abgeschätzt werden kann. Man berechnet, mit $f(x_1, x_2) = (x_2, -\sin x_1 + u)^T$,

$$DV(x_1, x_2)f(x_1, x_2, u) = (4x_1 + 2x_2)x_2 + (2x_1 + 2x_2)(-\sin x_1 + u).$$

Ist $x_1 + x_2 \neq 0$, so kann man dies durch Wahl von u negativ machen. Für die anderen Werte mit $x \neq 0$ ist dies automatisch negativ. In der Tat, ist $x_1 + x_2 = 0$, so ist der zweite Summand gleich 0, und der erste ist dann gleich

$$(4x_1 + 2x_2)x_2 = -2x_2^2 < 0$$

außer wenn $x_2 = 0$. Dann ist aber auch $x_1 = 0$. Daher ist V eine globale Kontroll-Lyapunovfunktion.

Wir formulieren jetzt die Analoga zu Theorem 3.13 und 3.16. Die Beweise werden wir nicht vollständig durchführen, sondern sie nur skizzieren.

Theorem 3.36 Betrachte ein Kontrollsystem der Form (3.19) mit $f(0, 0) = 0$. Es gebe eine lokal (globale) Kontroll-Lyapunovfunktion V im Sinne von Definition 3.31. Dann ist das Gleichgewicht $x^* = 0$ lokal (global) asymptotisch kontrollierbar. Hier ist eine Vergleichsfunktion β gegeben durch

$$\beta(r, t) = c \alpha_1^{-1}(\mu(t, \alpha_2(r))), \quad (3.26)$$

wobei μ die Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{d}{dt}\mu(t, r) = -g(\mu(t, r)), \quad \mu(0, r) = r.$$

mit g aus Bemerkung 3.32 ist und $c > 1$ eine Konstante ist.

Beweisskizze: Der Beweis erfolgt ähnlich wie der von Theorem 3.13; zusätzlich muss allerdings eine geeignete Kontrollfunktion konstruiert werden. Wähle $\Delta > 0$ und Zeiten $t_i = i\Delta$ für $i \in \mathbb{N}$. Nun konstruiere induktiv eine Kontrollfunktion u_x wie folgt. Für $x_0 := x$ wähle u_0 , so dass das Infimum in

$$\inf \left\{ V(\varphi(\Delta, x_0, u)) + \int_0^\Delta W(\varphi(s, x_0, u)) ds, \quad u \in \mathcal{U} \text{ with } \|u\|_\infty \leq \delta(\|x\|) \right\}$$

approximativ erreicht wird. Setze $x_1 = \varphi(\Delta, x_0, u_0)$ und berechne für x_1 eine Kontrollfunktion u_1 analog; setze $x_2 = \varphi(\Delta, x_1, u_1)$ und so weiter. Die zugehörigen Kontrollen werden zu einer Kontrolle u_x zusammengeklebt durch $u_x(t) = u_i(t - t_i)$ für $t \in [t_i, t_{i+1}]$. Die zugehörige Trajektorie erfüllt (für genügend kleines Δ)

$$V(\varphi(t, x, u_x)) \leq V(x) + \int_0^t W(\varphi(s, x, u_x)) ds,$$

und dann gehen wir wie im Beweis von Theorem 3.13 weiter.

Jetzt formulieren wir die Umkehrung von Theorem 3.36.

Theorem 3.37 *Betrachte ein Kontrollsystem der Form (3.19). mit $f(0, 0) = 0$. Ist das Gleichgewicht $x^* = 0$ lokal (global) asymptotisch kontrollierbar, so existiert eine lokale (globale) Kontroll-Lyapunovfunktion V im Sinn von Definition 3.31.*

Beweisskizze: Der Beweis erfolgt ähnlich wie der von Theorem 3.16; we beschränken uns wieder auf den globalen Fall. Ferner nehmen wir zur Vereinfachung an, dass $\delta(r) \equiv C$ konstant ist. (der allgemeine Fall erfordert diverse technische Vorbereitungen).

Wähle W als \tilde{W} im Beweis von Theorem 3.13 und definiere

$$V(x) := \inf \left\{ \int_0^\infty W(\varphi(s, x, u)) ds, u \in \mathcal{U} \text{ mit } \|u\|_\infty \leq C \right\}.$$

Die oberen und unteren Schranken α_1 und α_2 werden wie oben hergeleitet. Zusätzlich gilt (3.24) (das Infimum wird im Weiteren wie oben genommen):

$$\begin{aligned} V(x) &= \inf \left\{ \int_0^\infty W(\varphi(s, x, u)) ds \right\} \\ &= \inf \left\{ \int_0^t W(\varphi(s, x, u)) ds + \int_t^\infty W(\varphi(s, x, u)) ds \right\} \\ &= \inf \left\{ \int_0^t W(\varphi(s, x, u)) ds + \int_0^\infty W(\varphi(s, \varphi(t, x, u), u(t + \cdot))) ds \right\} \\ &\geq \inf \left\{ \int_0^t W(\varphi(s, x, u)) ds + V(\varphi(t, x, u)) \right\} \end{aligned}$$

Mit etwas mehr Anstrengung kann man auch die Gleichheit zeigen.

Behauptung: Die Funktion V ist stetig.

Dann verläuft der Rest des Beweises wie der von Theorem 3.16 und wird weggelassen.

Beweis der Behauptung: Sei $\varepsilon > 0$. Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ und $t > 0$ gibt es $u = u_{x,t} \in \mathcal{U}$ mit $\|u\|_\infty \leq c$ so dass

$$V(x) \geq \int_0^t W(\varphi(s, x, u_{x,t})) ds + V(\varphi(t, x, u_{x,t})) - \varepsilon.$$

Beachte $\varphi(s, x, u_{x,t}) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$, weil andernfalls das Integral über W gegen ∞ geht, was unmöglich ist. Für gegebenes $R > 0$ wähle $\varepsilon_0 > 0$ und $t > 0$ groß genug, so dass

$$\|\varphi(s, x, u_{x,t})\| \leq \varepsilon_0 \text{ für alle } \|x\| \leq R \text{ and } \alpha_2(2\varepsilon_0) \leq \varepsilon.$$

Daher gilt für $x, y \in \mathbb{R}^n$ with $\|x\|, \|y\| \leq R$

$$\begin{aligned} & V(x) - V(y) \\ &= \inf \left\{ \int_0^t W(\varphi(s, x, u)) ds + V(\varphi(t, x, u)) \right\} - \inf \left\{ \int_0^t W(\varphi(s, y, u)) ds + V(\varphi(t, y, u)) \right\} \\ &\leq \int_0^t W(\varphi(s, x, u_{y,t})) ds + V(\varphi(t, x, u_{y,t})) - \int_0^t W(\varphi(s, y, u_{y,t})) ds - V(\varphi(t, y, u_{y,t})) + \varepsilon \\ &\leq \int_0^t [W(\varphi(s, x, u_{y,t})) - W(\varphi(s, y, u_{y,t}))] ds + V(\varphi(t, x, u_{y,t})) + \varepsilon, \end{aligned}$$

weil $V(\varphi(t, y, u_{y,t})) \geq 0$. Für $\|x - y\|$ klein genug impliziert Gronwalls Lemma, dass

$$\|\varphi(s, x, u_{y,t}) - \varphi(s, y, u_{y,t})\|$$

für alle $s \in [0, t]$ klein ist. Daher gilt für $\|x - y\|$ klein genug

$$\int_0^t [W(\varphi(s, x, u_{y,t})) - W(\varphi(s, y, u_{y,t}))] ds \leq \varepsilon$$

und

$$|\varphi(s, x, u_{y,t})| \leq |\varphi(s, y, u_{y,t})| + \varepsilon_0 \leq 2\varepsilon_0.$$

Die letzte Ungleichung impliziert

$$V(\varphi(t, x, u_{y,t})) \leq \alpha_2(|\varphi(t, x, u_{y,t})|) \leq \alpha_2(2\varepsilon_0) \leq \varepsilon.$$

Daher erhält man für $\|x - y\|$ klein genug die Ungleichung

$$V(x) - V(y) \leq 3\varepsilon.$$

Dieselben Argumente liefern auch die behauptete Stetigkeit

$$|V(x) - V(y)| \leq 3\varepsilon.$$

Man beachte, dass wir keine Lipschitz-Stetigkeit erhalten (im Gegensatz zum Beweis von Theorem 3.16). Man kann jedoch in der Tat zeigen, dass Lipschitz-stetige Kontroll-Lyapunovfunktionen existieren. Ferner beachte man, dass selbst für Lipschitz-stetige V Theorem 3.19 wegen des \inf vor der Ableitung nicht anwendbar ist.

Kapitel 4

Feedback-Stabilisierung

Die Existenz einer Kontroll-Lyapunovfunktion ist, wie wir gesehen haben, äquivalent zur asymptotischen Kontrollierbarkeit. In diesem Kapitel betrachten wir eine stärkere Eigenschaft: Existenz von stetigen stabilisierenden Feedbacks. Dazu leiten wir zunächst eine notwendige Bedingung für Feedback-Stabilisierbarkeit her, Brocketts notwendige Bedingung. Dann werden wir an einem Beispiel (Artsteins Kreise) zeigen, dass aus asymptotischer Kontrollierbarkeit nicht die Existenz von stetigen stabilisierenden Feedbacks folgt. Schließlich präsentieren wir eine universelle Formel für stabilisierende Feedbacks, die von E.D. Sontag stammt.

4.1 Brocketts Bedingung

In diesem Abschnitt werden wir zuerst eine leicht überprüfbare notwendige Bedingung an das Vektorfeld $f(x, u)$ herleiten, mit der man testen kann, ob ein System Lipschitz-stetig Feedback-stabilisierbar ist. Dies Kriterium wurde 1983 von dem amerikanischen Mathematiker Roger W. Brockett veröffentlicht [1]; der Beweis, den wir hier angeben, stammt aus dem Buch von E.D. Sontag [12]. Wir formulieren das Resultat in Lemma 4.1 zuerst für unkontrollierte Differentialgleichungen $\dot{x} = f(x)$ und geben danach die Folgerung für kontrollierte Differentialgleichungen $\dot{x} = f(x, u)$ an. Hierbei bezeichnen B_ρ und $\text{cl}B_\rho$ den offenen bzw. abgeschlossenen Ball mit Radius $\rho > 0$ um den Nullpunkt im \mathbb{R}^n .

Lemma 4.1 *Betrachte ein gewöhnliche Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ mit lokal Lipschitz-stetigem Vektorfeld $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ und lokal asymptotisch stabilem Gleichgewicht $x^* = 0$. Dann enthält die Menge*

$$f(\mathbb{R}^n) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid y = f(x) \text{ für ein } x \in \mathbb{R}^n\}$$

eine Umgebung B_ε der Null.

Beweis. Es bezeichne S_ρ die Sphäre mit Radius ρ im \mathbb{R}^n , also $S_\rho = \partial B_\rho$. Wir skizzieren zunächst den Beweis der folgenden Eigenschaft: Wenn eine stetige Abbildung $H : [0, 1] \times \text{cl}B_\rho \subset \mathbb{R}^n$ die Bedingungen

$$H(1, x) = -x \text{ für alle } x \in S_\rho \text{ und } H(t, x) \neq 0 \text{ für alle } x \in S_\rho, t \in [0, 1] \quad (4.1)$$

erfüllt, so existiert ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\text{cl}B_\varepsilon \subset H(0, \text{cl}B_\rho) := \{p \in \mathbb{R}^n \mid |p = H(0, x) \text{ für ein } x \in \text{cl}B_\rho\}. \quad (4.2)$$

Der Beweis von (4.2) beruht auf dem Brouwerschen Abbildungsgrad $\text{deg}(G, p)$ einer Abbildung $G : \text{cl}B_\rho \rightarrow \mathbb{R}^n$ in einem Punkt $p \in B_\rho$. Dies ist eine ganze Zahl, die der Abbildung zugeordnet wird (für eine genaue Definition siehe z.B. H. Jeggel, Nichtlineare Funktionalanalysis, Teubner, 1979. [6, Definition (3)]). Der Betrag $|\text{deg}(G, p)|$ liefert eine untere Schranke für die Anzahl der Lösungen $y \in \text{cl}B_\rho$ der Gleichung $G(y) = p$. Der Abbildungsgrad existiert unter den obigen Voraussetzungen an H für die Abbildungen $G_t(x) := H(t, x), t \in [0, 1]$, zudem ist er unabhängig von $t \in [0, 1]$ (dies folgt aus dem Homotopiesatz [6, Satz (26)]). Aus dem Randsatz [6, Satz (27)] und der expliziten Formel von $\text{deg}(G, p)$ für differenzierbares G erhält man $\text{deg}(G_t, 0) = (-1)^n$ für alle $t \in [0, 1]$. Aus der Stetigkeit von $G_0(x) = H(0, x)$ in x und der Kompaktheit der Sphäre S_ρ folgt die Existenz von $\varepsilon > 0$ mit $\|G_0(x)\| > \varepsilon$. Hieraus folgt mit [6, Satz (29)] die Gleichung

$$\text{deg}(G_0, p) = (-1)^n$$

für alle $p \in \text{cl}B_\varepsilon$. Folglich besitzt die Gleichung $G_0(y) = p$ für alle $p \in \text{cl}B_\varepsilon$ mindestens eine Lösung $y \in \text{cl}B_\rho$, woraus (4.2) folgt.

Mit Hilfe von (4.2) beweisen wir nun das Lemma. Wähle einen abgeschlossenen Ball $\text{cl}B_\rho \subset N$, wobei N die Umgebung aus der Stabilitätsdefinition ist. Wir wenden (4.2) auf die folgende Abbildung an:

$$H(t, x) := \begin{cases} f(x), & t = 0 \\ -x & t = 1 \\ \frac{1}{t} \left[\varphi \left(\frac{t}{1-t}, x \right) - x \right], & t \in (0, 1). \end{cases}$$

Wir müssen nachweisen, dass diese Funktion H stetig ist und die Bedingungen in (4.1) erfüllt. Zunächst ist sicherlich $H(1, x) = -x$, zudem ist $H(t, x) \neq 0$ für alle $x \in S_\rho \subset N \setminus \{0\}$ und alle $t \in [0, 1]$, weil $H(0, x) = 0$ bedeuten würde, dass x ein Gleichgewicht ist, $H(1, x) = -x \neq x$, und $H(t, x) = 0$ für $t \in (0, 1)$ bedeuten würde, dass

$$\varphi \left(\frac{t}{1-t}, x \right) - x = 0,$$

also, dass x ein periodischer Punkt ist. Beides widerspäche der asymptotischen Stabilität auf N .

Es bleibt, die Stetigkeit von H zu zeigen. Für $t \in (0, 1)$ ist H als Komposition stetiger Funktionen stetig, für $t \rightarrow 1$, also $\frac{t}{1-t} \rightarrow \infty$ gilt wegen der asymptotischen Stabilität

$$\varphi \left(\frac{t}{1-t}, x \right) \leq \beta(\rho, \frac{t}{1-t}) \rightarrow 0,$$

woraus $H(t, x) \rightarrow -x$ gleichmäßig in x und damit die Stetigkeit folgt. Zum Beweis der Stetigkeit in $t = 0$ zeigen wir, dass für jedes $x \in \text{cl}B_\rho$ und jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $t \in [0, 1], y \in \text{cl}B_\rho$ gilt

$$t < \delta, \|y - x\| < \delta \text{ impliziert } \|H(t, y) - f(x)\| < \varepsilon. \quad (4.3)$$

Zum Beweis von (4.3) verwenden wir die aus der Integraldarstellung der Lösungen stammende Gleichung

$$\frac{1}{s}[\varphi(s, y) - y] = \frac{1}{s} \int_0^s f(\varphi(\tau, y)) d\tau.$$

Hieraus folgt

$$\frac{1+s}{s}[\varphi(s, y) - y] - f(x) = \frac{1}{s} \int_0^s (f(\varphi(\tau, y)) - f(x)) d\tau + \int_0^s f(\varphi(\tau, y)) d\tau.$$

Wegen der Stetigkeit von $f(\varphi(\cdot, \cdot))$ existieren nun $\delta_1, \delta_2 > 0$, so dass aus $s \in [0, \delta_1]$ und $\|y - x\| < \delta_2$ die Ungleichung

$$\|f(\varphi(\tau, y)) - f(x)\| < \varepsilon/2$$

folgt. Sei $M > 0$ eine Schranke für $\|f(\varphi(\tau, y))\|$ für $s \in [0, \delta_1]$ und $\|y - x\| < \delta_2$. Nun betrachte diese s und y und $t := s/(1+s)$, also $1-t = \frac{(1+s)-s}{1+s}$ und daher

$$\frac{t}{1-t} = s.$$

Es folgt die Ungleichung

$$\begin{aligned} \|H(t, y) - f(x)\| &= \left\| \frac{1}{t} \left[\varphi\left(\frac{t}{1-t}, x\right) - x \right] - f(x) \right\| \\ &= \left\| \frac{1+s}{s} [\varphi(s, y) - y] - f(x) \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{s} \int_0^s (f(\varphi(\tau, y)) - f(x)) d\tau + \int_0^s f(\varphi(\tau, y)) d\tau \right\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + Ms = \frac{\varepsilon}{2} + M \frac{t}{1-t}. \end{aligned}$$

Wählen wir nun $\delta > 0$ so klein, dass $\delta < \delta_2$, $\frac{\delta}{1-\delta} < \delta_1$ und $M \frac{\delta}{1-\delta} < \varepsilon/2$ ist, so erhalten wir hieraus (4.3).

Die Funktion H erfüllt also alle Voraussetzungen in (4.1), woraus (4.2) folgt und damit gibt es $\varepsilon > 0$ mit

$$\text{cl}B_\varepsilon \subset H(0, \text{cl}B_\rho) = f(\text{cl}B_\rho) \subset f(\mathbb{R}^n).$$

Der obige Beweis folgt i.W. Sontag, Beweis von Fact 5.9.17 [12]. ■

Der folgende Satz formuliert Lemma 4.1 für Kontrollsysteme.

Theorem 4.2 *Betrachte ein Kontrollsystem $\dot{x} = f(x, u)$ mit $f(0, 0) = 0$. Angenommen, es existiert ein (lokal) stabilisierendes Feedback $F : \mathbb{R}^n \rightarrow U$, so dass $f(x, F(x))$ lokal Lipschitz-stetig ist. Dann enthält die Menge*

$$f(\mathbb{R}^n, U) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid y = f(x, u) \text{ für ein } x \in \mathbb{R}^n \text{ und ein } u \in U\}$$

eine Umgebung B_ε der Null.

Beweis. Wenden wir Lemma 4.1 auf $g(x) = f(x, F(x))$ an, so erhalten wir sofort $B_\varepsilon \subset g(\mathbb{R}^n) \subset f(\mathbb{R}^n, U)$. ■

Bemerkung 4.3 *Im linearen Fall $\dot{x} = Ax + Bu$, also $f(x, u) = Ax + Bu$, bedeutet Brocketts Bedingung, dass $\text{rang}(A, B) = n$. Dies ist notwendig für Stabilisierbarkeit, weil nach dem Hautus-Kriterium Stabilisierbarkeit äquivalent dazu ist, dass*

$$\text{rang}(A - \lambda I, B) = n$$

für alle Eigenwerte λ von A mit $\text{Re } \lambda \geq 0$. Ist $\lambda = 0$ ein Eigenwert von A , so folgt also Brocketts Bedingung, ist $\lambda = 0$ kein Eigenwert von A , so gilt bereits $\text{rang} A = n$. Im linearen Fall ist auch klar, dass Brocketts Bedingung nicht hinreichend für Stabilisierbarkeit mit linearem Feedback ist.

In dem folgenden nichtlinearen Beispiel ist Brocketts Bedingung verletzt.

Beispiel 4.4 *Betrachte das 3d System mit 2d Kontrolle*

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= u_1(t), \\ \dot{x}_2(t) &= u_2(t), \\ \dot{x}_3(t) &= x_2(t)u_1(t).\end{aligned}$$

Man sieht leicht, dass kein Punkt der Form $(0, r, \varepsilon)$ mit $\varepsilon \neq 0$ und $r \in \mathbb{R}$ beliebig im Bild von f liegt. Dies System (Brocketts nichtholonomer Integrator) ist ein einfaches Modell eines lenkbaren Fahrzeugs mit Fahrtrichtungswinkel $\theta = x_1$ (gemessen an der waagerechten Achse) und Position

$$(z_1, z_2) = (x_2 \cos \theta + x_3 \sin \theta, x_2 \sin \theta - x_3 \cos \theta).$$

(Vergleiche das Modell des Einrads, Beispiel 2.4).

Mit Hilfe von Beispiel 4.4 können wir nun zeigen, dass die Umkehrung von Theorem 4.2 nicht gilt.

Korollar 4.5 *Die asymptotische Kontrollierbarkeit impliziert nicht die Lipschitz-stetige Feedback-Stabilisierbarkeit.*

Beweis. Betrachte Beispiel 4.4 mit $U = \mathbb{R}^2$. Nach Satz 4.2 ist das System nicht Lipschitz-stetig Feedback-stabilisierbar, da Brocketts notwendige Bedingung verletzt ist. Die Behauptung des Korollars folgt nun, wenn wir zeigen, dass das System asymptotisch kontrollierbar ist.

Für einen gegebenen Anfangswert $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ wählen wir die Kontrollen

$$u_1(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, 1] \\ -\text{sgn}(x_3)\sqrt{|x_3|}, & t \in (1, 2] \\ 0, & t \in (2, 3] \\ -(x_1 - \text{sgn}(x_3)\sqrt{|x_3|}), & t \in (3, 4] \\ 0, & t > 4, \end{cases}$$

$$u_2(t) = \begin{cases} \text{sgn}(x_3)\sqrt{|x_3|} - x_2, & t \in [0, 1] \\ 0, & t \in (1, 2] \\ -\text{sgn}(x_3)\sqrt{|x_3|} & t \in (2, 3] \\ 0 & t > 3. \end{cases}$$

Mit diesen Kontrollen ergeben sich die folgenden Zustände:

$$\begin{aligned}\varphi(1, x, u) &= \begin{bmatrix} x_1 + \int_0^1 0 dt \\ x_2 + \int_0^1 \left(\operatorname{sgn}(x_3) \sqrt{|x_3|} - x_2 \right) dt \\ x_3 + \int_0^1 x_2(t) 0 dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \operatorname{sgn}(x_3) \sqrt{|x_3|} \\ x_3 \end{bmatrix}, \\ \varphi(2, x, u) &= \begin{bmatrix} x_1 + \int_1^2 -\operatorname{sgn}(x_3) \sqrt{|x_3|} dt \\ \operatorname{sgn}(x_3) \sqrt{|x_3|} + \int_1^2 0 dt \\ x_3 + \int_1^2 \left(\operatorname{sgn}(x_3) \sqrt{|x_3|} \right) \left(-\operatorname{sgn}(x_3) \sqrt{|x_3|} \right) dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - \operatorname{sgn}(x_3) \sqrt{|x_3|} \\ \operatorname{sgn}(x_3) \sqrt{|x_3|} \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \varphi(3, x, u) &= \begin{bmatrix} x_1 - \operatorname{sgn}(x_3) \sqrt{|x_3|} - \int_2^3 0 dt \\ \operatorname{sgn}(x_3) \sqrt{|x_3|} + \int_2^3 -\operatorname{sgn}(x_3) \sqrt{|x_3|} dt \\ 0 + \int_2^3 x_2(t) 0 dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - \operatorname{sgn}(x_3) \sqrt{|x_3|} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \varphi(4, x, u) &= \begin{bmatrix} x_1 - \operatorname{sgn}(x_3) \sqrt{|x_3|} - \int_3^4 -\left(x_1 - \operatorname{sgn}(x_3) \sqrt{|x_3|} \right) dt \\ 0 + \int_3^4 0 dt \\ 0 + \int_2^3 x_2(t) 0 dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \varphi(4, x, u) &= 0 \text{ für } t \geq 4.\end{aligned}$$

Dabei haben wir benutzt, dass $x_2(t)$ konstant auf dem Intervall $[1, 2]$ und für $t \geq 4$ ist. Das System wird also in endlicher Zeit $t = 4$ nach 0 gesteuert. Verwenden wir der einfacheren Rechnung wegen die Maximums-Norm, so hat das System für $t \in [0, 4]$ den maximalen Abstand vom Nullpunkt

$$\|x\|_\infty \leq \max \left\{ |x_1| + \sqrt{|x_3|}, |x_2|, |x_3| \right\} \leq \|x\|_\infty + \sqrt{\|x\|_\infty}.$$

Die Funktion

$$\beta(r, t) := e^4 e^{-t} (r + \sqrt{r})$$

ist daher eine \mathcal{KL} -Funktion mit

$$\|\varphi(t, x, u)\|_\infty \leq \beta(\|x\|_\infty, t).$$

Da zudem

$$\|u(t)\|_\infty \leq |x_1| + \sqrt{|x_3|} \leq \|x\|_\infty + \sqrt{\|x\|_\infty},$$

folgt die asymptotische Kontrollierbarkeit mit $\gamma(r) = r + \sqrt{r}$. ■

4.2 Beispiel: Artsteins Kreise

In diesem Abschnitt diskutieren wir ein Beispiel, für das eine nichtdifferenzierbare Kontroll-Lyapunovfunktion existiert, das also asymptotisch kontrollierbar ist, das Brocketts Bedingung erfüllt, für das aber kein Lipschitz-stetig stabilisierendes Feedback existiert — tatsächlich existiert nicht einmal ein stetig stabilisierendes Feedback. Das von dem israelischen Mathematiker Zvi Artstein stammende und unter dem Namen “Artsteins Kreise” bekannte Beispiel ist gegeben durch die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= (-x_1(t)^2 + x_2(t)^2) u(t), \\ \dot{x}_2(t) &= (-2x_1(t)x_2(t))u(t).\end{aligned}\tag{4.4}$$

Hier ist Brocketts Bedingung erfüllt: Für $v = (v_1, v_2)^T \in \mathbb{R}^2$ mit $v_2 \neq 0$ wählen wir

$$x_1 = 1, x_2 = \frac{v_1}{v_2} + \sqrt{\frac{v_1^2}{v_2^2} + 1} \neq 0, u = -\frac{v_2}{2x_2},$$

was impliziert

$$x_2^2 - 1 = -2\frac{v_1}{v_2}x_2.$$

Damit ergibt sich für $f(x, u) \in f(\mathbb{R}^n, U)$

$$f(x, u) = \begin{bmatrix} -1 + x_2^2 \\ -2x_1x_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{v_2}{2x_2} \\ -\frac{v_2}{2x_2} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \left(-2\frac{v_1}{v_2}x_2\right) \left(-\frac{v_2}{2x_2}\right) \\ \left(-2x_2\right) \left(-\frac{v_2}{2x_2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}.$$

Für $v_2 = v_1 = 0$ wählen wir $u = 0$ und x beliebig und für $v_2 = 0$ und $v_1 \neq 0$ wählen wir $x_1 = 0, x_2 = \sqrt{|v_1|}$ und $u = \text{sgn}(v_1)$. Somit liegt jeder Vektor $v \in \mathbb{R}^2$ im Bild von f , womit Brocketts Bedingung erfüllt ist.

Um zu zeigen, dass das System nicht mit stetigem Feedback stabilisierbar ist, betrachten wir die Lösungstrajektorien, die sich für dieses System analytisch beschreiben lassen: Für den Anfangswert $x = (x_1, x_2)$ setzen wir

$$r = r(x) = \begin{cases} \|x\|^2/2x_2, & x_2 > 0 \\ -\|x\|^2/2x_2, & x_2 < 0 \\ 0, & x_2 = 0 \text{ und } x_1 = 0 \\ \infty, & x_2 = 0 \text{ und } x_1 \neq 0. \end{cases}$$

Um die Lösungen zu diesem Anfangswert zu beschreiben, definiere $\psi_r(\cdot, \psi_0, u) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $\psi_\infty(t, \psi_0, u) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ als die Lösungen der 1d Kontrollsysteme

$$\dot{\psi}_r(t) = g_r(\psi, u) = 2u(t)r(\cos \psi_r(t) - 1), \quad r \sin \psi_0 = x_1,$$

und

$$\dot{\psi}_\infty(t) = g_\infty(\psi_\infty, u) = -u(t)\psi_\infty(t)^2, \quad \psi_0 = x_1.$$

Dann rechnet man nach, dass die Lösung die folgende Form hat:

$$\varphi(t, x, u) = \begin{cases} (r \sin \psi_r(t, \psi_0, u), -r \cos \psi_r(t, \psi_0, u) + r)^\top, & x_2 > 0 \\ (r \sin \psi_r(t, \psi_0, u), r \cos \psi_r(t, \psi_0, u) - r)^\top, & x_2 < 0 \\ 0 & x_2 = 0 \text{ und } x_1 = 0 \\ (\psi_\infty(t, \psi_0, u), 0)^\top & x_2 = 0 \text{ und } x_1 \neq 0, \end{cases}$$

In der Tat erfüllt dies die Differentialgleichung und die Anfangsbedingung. Zum Beispiel ist die Anfangsbedingung für den Fall $x_2 > 0$

$$\begin{bmatrix} r \sin \psi_r(0, \psi_0, u) \\ -r \cos \psi_r(0, \psi_0, u) + r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \sin \psi_0 \\ -r \cos \psi_0 + r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -r \cos \psi_0 + r \end{bmatrix}$$

und

$$\begin{aligned}
-r \cos \psi_0 + r &= -r \sqrt{1 - \sin^2 \psi_0} + r = -r \sqrt{1 - \frac{x_1^2}{r^2}} + r = -\sqrt{r^2 - x_1^2} + r \\
&= -\sqrt{\frac{[x_1^2 + x_2^2]^2}{4x_2^2} - x_1^2} + \frac{x_1^2 + x_2^2}{2x_2} \\
&= -\frac{1}{2x_2} \sqrt{[x_1^2 + x_2^2]^2 - 4x_1^2 x_2^2} + \frac{x_1^2 + x_2^2}{2x_2} \\
&= -\frac{1}{2x_2} \sqrt{[x_1^2 - x_2^2]^2} + \frac{x_1^2 + x_2^2}{2x_2} \\
&= \frac{1}{2x_2} [-x_1^2 + x_2^2 + x_1^2 + x_2^2] \\
&= x_2.
\end{aligned}$$

Wegen der Periodizität des Cosinus können wir im Falle $r < \infty$ annehmen, dass $\psi_0 \in [-\pi, \pi]$. Der Nullpunkt $x = (0, 0)^\top$ entspricht dann gerade dem Punkt $\psi_0 = 0$. Beachte, dass man die Lösungskurven nicht verlassen kann, egal wie u gewählt wird; man kann lediglich die Richtung und die Geschwindigkeit beeinflussen, mit der diese Kurven durchlaufen werden. Ferner rechnet man sofort nach, dass die Komponenten $x_1(t), x_2(t)$ von $\varphi(t, x, u)$ für $x_2 > 0$ die Gleichung

$$x_1(t)^2 + (x_2(t) - r)^2 = r^2$$

erfüllen, also auf einem Kreis um $(0, r)$ mit Radius r liegen; analog für $x_2 < 0$.

Wir wollen nun beweisen, dass es kein stetiges Feedback geben kann, das dieses System stabilisiert, nicht einmal lokal. Wir nehmen dazu an, dass mit $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ein lokal stabilisierendes stetiges Feedback gegeben ist.

Wähle ein $r > 0$ so klein, dass der zugehörige Lösungskreis ganz in der Umgebung N liegt, in der das mittels F geregelte System asymptotisch stabil ist. Für die durch

$$\tilde{F}(\psi) = F(r \sin \psi, -r \cos \psi + r)$$

gegebene Abbildung $\tilde{F} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt dann, dass die zugehörigen Lösungen $\varphi_F(t, x)$ des geregelten Systems für Anfangswerte $x = (x_1, x_2)$ mit $x_2 > 0$ und $r(x) = r$ von der Form

$$\varphi_F(t, x) = (r \sin \psi_r(t, \psi_0, \tilde{F}), -r \cos \psi_r(t, \psi_0, \tilde{F}) + r)^T$$

mit $r \sin \psi_0 = x_1$ sind.

Aus der angenommenen asymptotischen Stabilität folgt $\varphi_F(t, x) \rightarrow 0$ und $\|\varphi_F(t, x)\| \leq \beta(\|x\|, 0)$, woraus für ψ_0 hinreichend nahe bei 0 die Konvergenz $\psi_r(t, \psi_0, \tilde{F}) \rightarrow 0$ folgt. Da $\psi_r(t)$ eindimensional ist, muss in einer Umgebung der Null also gelten

$$g_r(\psi, \tilde{F}(\psi)) < 0 \text{ für } \psi > 0, g_r(\psi, \tilde{F}(\psi)) > 0 \text{ für } \psi < 0 \quad (4.5)$$

Wiederum wegen der Periodizität von Sinus und Cosinus gilt

$$g_r(\psi + 2\pi, \tilde{F}(\psi + 2\pi)) = g_r(\psi, \tilde{F}(\psi))$$

für alle $v \in \mathbb{R}$. Also folgt aus (4.5), dass eine Umgebung von $\psi^* = 2\pi$ existiert, so dass

$$g_r(\psi, \tilde{F}(\psi)) < 0 \text{ für } \psi > 2\pi, g_r(\psi, \tilde{F}(\psi)) > 0 \text{ für } \psi < 2\pi \quad (4.6)$$

gilt. Aus (4.5) und (4.6) folgt, dass ein $\xi > 0$ existiert, so dass

$$g_r(\xi, \tilde{F}(\xi)) < 0 \text{ und } g_r(2\pi - \xi, \tilde{F}(2\pi - \xi)) > 0$$

Da auch $g_r(\psi, \tilde{F}(\psi))$ wegen der Stetigkeit von F stetig ist, existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi_0 \in [\xi, 2\pi - \xi]$ mit $g_r(\xi_0, \tilde{F}(\xi_0)) = 0$. Daraus folgt, dass auch $f(x_1, F) = 0$ ist für $x_1 = (r \sin \xi_0, -r \cos \xi_0 + r) \neq 0$, also ist x_1 ein Gleichgewicht und es folgt

$$\varphi(t, x_1) = x_1 \text{ für alle } t > 0. \quad (4.7)$$

Da x_1 aber auf dem zu r gehörigen Lösungskreis liegt, liegt x_1 in N . In diesem Bereich ist das geregelte System aber asymptotisch stabil, also folgt $\varphi_F(t, x_1) \rightarrow 0$, was ein Widerspruch zu (4.7) ist. Also kann F nicht existieren.

Schließlich geben wir eine (nicht-differenzierbare) Kontroll-Lyapunov an.

$$V(x) := \sqrt{4x_1^2 + 3x_2^2} - |x_1|. \quad (4.8)$$

4.3 Sontags Universelle Formel

In diesem Abschnitt betrachten wir kontroll-affine Systeme der Form

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) := f_0(x(t)) + \sum_{i=1}^m u_i(t) f_i(x(t)) \quad (4.9)$$

mit $x \in \mathbb{R}^n$ und $u = (u_1, u_2, \dots, u_m) \in U = \mathbb{R}^m$, wobei die f_i lokal Lipschitz-stetige Abbildungen von \mathbb{R}^n nach \mathbb{R}^n sind. Zudem betrachten wir in diesem Abschnitt Feedbacks $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, die die folgende Annahme erfüllen.

$$F \text{ ist stetig auf } \mathbb{R}^n \text{ und Lipschitz-stetig auf } \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \text{ mit } F(0) = 0. \quad (4.10)$$

Die Bedingung $F(0) = 0$ kann hierbei o.B.d.A. angenommen werden, ansonsten transformieren wir f und F mittels $\tilde{f}(x, u) := f(x, u + F(0))$, $\tilde{F}(x) := F(x) - F(0)$.

Beachte, dass $f(x, F(x))$ für ein solches Feedback nicht Lipschitz-stetig in $x = 0$ sein muss. Wir schwächen unsere bisher gemachten Bedingungen also etwas ab. Insbesondere müssen die Lösungen von (4.9) mit diesem Feedback für Anfangswert $x = 0$ nicht eindeutig sein. Wenn das Feedback F allerdings asymptotisch stabilisierend ist, erhalten wir wieder Eindeutigkeit, da aus der Ungleichung

$$\|\varphi_F(t, 0)\| \leq \beta(\|0\|, t) = 0$$

zwingend $\varphi_F(t, 0) = 0$ folgt und es daher nur die Nulllösung zum Anfangswert $x = 0$ geben kann.

Das Ziel in diesem Abschnitt ist es zu beweisen, dass aus der Existenz einer **glatten** Kontroll-Lyapunovfunktion die Existenz eines stabilisierenden Feedbacks folgt — ein Resultat, das auf Z. Artstein zurück geht. Wir werden aber

noch etwas mehr als einen abstrakten Existenzbeweis führen, denn man kann sogar eine explizite Formel für F angeben. Diese Formel ist in der Literatur als universelle Formel oder — nach ihrem Erfinder E.D. Sontag — Sontag-Formel bekannt. Das daraus resultierende Feedback wird i.A. nicht mehr Lipschitz-stetig stabilisierend sein, erfüllt aber die nur leicht schwächere Bedingung (4.10).

Um die Rechnungen zu vereinfachen, beschränken wir uns im folgenden Satz auf den Fall $m = 1$ in (4.9), d.h.

$$f(x, u) = f_0(x) + u f_1(x)$$

mit $u \in \mathbb{R}$ und geben die allgemeine Lösung in Bemerkung 4.7 nur an.

Theorem 4.6 *Betrachte ein kontroll-affines Kontrollsystem (4.9) mit $m = 1$. Sei V eine stetig differenzierbare globale Kontroll-Lyapunovfunktion, für die mit $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$ gilt*

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|)$$

und die mit einer Funktion W wie in Definition 3.31 die Bedingung

$$\inf_{u \in U, \|u\| \leq \gamma(\|x\|)} DV(x)f(x, u) \leq -W(x) < 0 \text{ für ein } \gamma \in \mathcal{K} \quad (4.11)$$

erfüllt. Definiere F durch $F(0) := 0$ und für $x \neq 0$

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{DV(x)f_0(x) + \sqrt{(DV(x)f_0(x))^2 + (DV(x)f_1(x))^4}}{DV(x)f_1(x)}, & \text{falls } DV(x)f_1(x) \neq 0 \\ 0 & \text{falls } DV(x)f_1(x) = 0 \end{cases}$$

Dann ist F ein stetiges Feedback, das (4.10) erfüllt und für das die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = f(x(t), F(x(t)))$$

global asymptotisch stabil ist.

Beweis. Wir betrachten zunächst die Abbildung

$$\psi(a, b) := \begin{cases} \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{b}, & b \neq 0 \\ 0, & b = 0 \end{cases}$$

und die Menge

$$S := \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid b > 0 \text{ oder } a < 0\}.$$

Wir zeigen, dass $\psi : S \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Abbildung ist. Dies folgt aus dem impliziten Funktionensatz, da für

$$\phi(a, b, p) := bp^2 - 2ap - b$$

die folgende Gleichung gilt:

$$\begin{aligned} \phi(a, b, \psi(a, b)) &= \frac{b}{b^2} \left(a + \sqrt{a^2 + b^2} \right)^2 - 2\frac{a}{b} \left(a + \sqrt{a^2 + b^2} \right) - b \\ &= \frac{a^2}{b} + 2\frac{a}{b} \sqrt{a^2 + b^2} + \frac{1}{b} (a^2 + b^2) - 2\frac{a^2}{b} - 2\frac{a}{b} \sqrt{a^2 + b^2} - b \\ &= 0. \end{aligned}$$

Die Funktion ϕ ist stetig differenzierbar und die Ableitung

$$\frac{\partial \phi}{\partial p}(a, b, p) = 2bp - 2a$$

ist ungleich 0 in einer Umgebung von $(a, b, \psi(a, b))$ (hat hier also vollen Rang):
 Falls $b = 0$ ist, gilt $2bp - 2a = -2a > 0$, und falls $b \neq 0$ gilt

$$2b\psi(a, b) - 2a = 2a + 2\sqrt{a^2 + b^2} - 2a = 2\sqrt{a^2 + b^2} > 0.$$

Daher ist der implizite Funktionensatz anwendbar und ψ ist stetig differenzierbar.

Wir zeigen nun zunächst die Lipschitz-Stetigkeit von F auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Wir können F mit Hilfe von ψ als

$$F(x) = -DV(x)f_1(x)\psi(DV(x)f_0(x), (DV(x)f_1(x))^2)$$

schreiben. Falls $x \neq 0$ und $DV(x)f_1(x)^2 = 0$ ist, muss die Ungleichung

$$DV(x)f(x, u) < 0$$

gelten, weil

$$\inf_u DV(x)f(x, u) \leq -W(x) < 0.$$

Also gilt dann $DV(x)f_0(x) = DV(x)f(x, u) < 0$ und daher ist für $x \neq 0$

$$(DV(x)f_0(x), DV(x)f_1(x)^2) \in S.$$

Weil $\psi : S \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Abbildung ist, folgt, dass $\psi(DV(x)f_0(x), (DV(x)f_1(x))^2)$ und damit auch F auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ eine Komposition Lipschitz-stetiger Funktionen ist und damit selbst Lipschitz-stetig ist.

Wir schreiben nun kurz $g(x) = f(x, F(x))$. Für $x \neq 0$ ist

$$\begin{aligned} DV(x)g(x) &= DV(x)f_0(x) + DV(x)f_1(x)F(x) \\ &= -\sqrt{(DV(x)f_0(x))^2 + (DV(x)f_1(x))^4}. \end{aligned}$$

Daher ist V eine Lyapunovfunktion für g mit

$$W(x) = \sqrt{(DV(x)f_0(x))^2 + (DV(x)f_1(x))^4} > 0 \text{ für } x \neq 0,$$

woraus **die globale asymptotische Stabilität folgt** (Lipschitz auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ reicht!).

Es bleibt die Stetigkeit von F in $x = 0$ zu zeigen. Wegen $F(0) = 0$ ist also zu zeigen, dass $F(x_n) \rightarrow 0$ gilt für jede Folge $x_n \rightarrow 0$. Da V in 0 ein lokales Minimum besitzt, folgt $DV(0) = 0$, also $DV(x) \rightarrow 0$ für $x_n \rightarrow 0$. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

1. Fall: Falls $DV(x)f_0(x) \geq 0$ ist, betrachte die Ungleichung

$$DV(x)f_0(x) + \inf_{u \in U, |u| \leq \gamma(\|x\|)} DV(x)uf_1(x) \leq -W(x) \leq 0$$

Das Infimum wird hier entweder für $u = \gamma(\|x\|)$ oder $u = -\gamma(\|x\|)$ angenommen und ist in jedem Fall gleich $-\gamma(x)|DV(x)f_1(x)|$. Also erhalten wir unter Ausnutzung von $DV(x)f_0(x) \geq 0$ die Ungleichung

$$|DV(x)f_0(x) - \gamma(\|x\|)|DV(x)f_1(x)| = DV(x)f_0(x) - \gamma(\|x\|)|DV(x)f_1(x)| \leq 0.$$

Wegen $\sqrt{a^2 + b^2} \leq \sqrt{(a+b)^2} = a+b$ für $a, b \geq 0$ gilt

$$\begin{aligned} & DV(x)f_0(x) + \sqrt{(DV(x)f_0(x))^2 + (DV(x)f_1(x))^4} \\ & \leq 2|DV(x)f_0(x)| + (DV(x)f_1(x))^2. \end{aligned}$$

Es ergibt sich

$$|F(x)| \leq 2 \frac{|DV(x)f_0(x)|}{|DV(x)f_1(x)|} + \frac{(DV(x)f_1(x))^2}{|DV(x)f_1(x)|} \leq 2\gamma(\|x\|) + |DV(x)f_1(x)|$$

2. Fall: Falls $DV(x)f_0(x) < 0$ ist, gilt

$$DV(x)f_0(x) + \sqrt{(DV(x)f_0(x))^2 + (DV(x)f_1(x))^4} \leq (DV(x)f_1(x))^2$$

also

$$|F(x)| \leq \frac{(DV(x)f_1(x))^2}{|DV(x)f_1(x)|} \leq |DV(x)f_1(x)|,$$

d.h. wir erhalten eine kleinere Schranke als in Fall 1.

Für $x_n \rightarrow 0$ folgt damit

$$|F(x_n)| \leq 2\gamma(\|x_n\|) + |DV(x_n)f_1(x_n)|.$$

Hier gilt $\gamma(\|x_n\|) \rightarrow 0$, $f_1(x_n)$ bleibt beschränkt, und $DV(x_n) \rightarrow 0$, weil DV stetig ist und $x = 0$ ein lokales Minimum von V ist, also $DV(0) = 0$ folgt. Dies zeigt die Stetigkeit von F und beendet damit den Beweis. ■

Bemerkung 4.7 *Im allgemeinen Fall (d.h. $m > 1$) erhält man für die i -te Komponente des Feedbacks $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ die Formel*

$$F_i(x) = -DV(x)f_i(x)\psi \left(DV(x)f_0(x), \sum_{k=1}^m (DV(x)f_k(x))^2 \right)$$

für $x \neq 0$ und $F(0) = 0$, mit ψ aus dem Beweis von Theorem 4.6.

Wir illustrieren das Resultat an zwei Beispielen.

Beispiel 4.8 *Betrachte die mathematische Pendelgleichung, bei der der Nullpunkt dem aufgerichteten Pendel entspricht,*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= -kx_2(t) + \sin x_1(t) \end{aligned}$$

Wir setzen $k = 1$ und addieren nun eine Kontrollvariable in der zweiten Komponente, also

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= -kx_2(t) + \sin x_1(t) + u, \end{aligned}$$

was physikalisch einer Kraft entspricht, mit der die Winkelgeschwindigkeit beeinflusst werden kann, z.B. durch einen Motor an der Drehachse. Betrachte die Funktion

$$V(x) = \frac{1}{2}((x_1 + x_2)^2 + x_1^2).$$

Um die Abschätzung nach unten zu erhalten, beachte, dass für $a \in (1, \sqrt{2})$ gilt

$$a^2 x_1^2 + 2x_1 x_2 + \frac{1}{a^2} x_2^2 = (ax_1 + \frac{1}{a} x_2)^2 \geq 0,$$

also

$$2x_1 x_2 \geq -a^2 x_1^2 - \frac{1}{a^2} x_2^2.$$

Dies liefert

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{1}{2} (2x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2) \\ &\geq \frac{1}{2} \left(2x_1^2 - a^2 x_1^2 - \frac{1}{a^2} x_2^2 + x_2^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} (2 - a^2) x_1^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{a^2} \right) x_2^2. \end{aligned}$$

Wegen $2 - a^2 > 2 - (\sqrt{2})^2 = 0$ und $1 - \frac{1}{a^2} > 1 - \frac{1}{1} = 0$ kann man dies nach unten abschätzen durch die Funktion

$$\alpha_1(r) = \frac{1}{2} \min(2 - a^2, 1 - \frac{1}{a^2}) r, \quad r \geq 0.$$

Ferner ist wegen $(x_1 + x_2)^2 \leq 2x_1^2 + 2x_2^2$

$$V(x) = \frac{1}{2} ((x_1 + x_2)^2 + x_1^2) \leq 2x_1^2 + 3x_2^2 < 3 \|x\|^2.$$

daher kann $V(x)$ nach oben durch $\alpha_2(r) = 3r^2$ abgeschätzt werden. Ferner gilt

$$DV(x)f((x, u)) = (2x_1 + x_2)x_2 + (2 + x_1)(-x_2 + \sin x_1 + u).$$

Wir zeigen, dass dies eine Kontroll-Lyapunovfunktion für das gegebene System ist, indem wir geeignete u wählen, so dass die Ableitungsbedingung erfüllt ist:

Hierzu setzen wir $u = -x_1 - x_2 - \sin x_1$, woraus $|u| \leq 3 \|x\|$ folgt; wir können also $\gamma(r) = 3r$ wählen. Für die Ableitung erhalten wir

$$\begin{aligned} DV(x)f(x, u) &= (2x_1 + x_2)x_2 + (x_2 + x_1)(-x_2 + \sin x_1 - x_1 - x_2 - \sin x_1) \\ &= (2x_1 + x_2)x_2 + (x_2 + x_1)(-x_1 - 2x_2) \\ &= 2x_1 x_2 + x_2^2 - x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_1 x_2 \\ &= -x_1^2 - x_2^2 - x_1 x_2 \leq -\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) = -\frac{1}{2} \|x\|^2 < 0. \end{aligned}$$

Damit ist V eine Kontroll-Lyapunovfunktion für das System, die (4.11) erfüllt.

In der Form (4.9) geschrieben, gilt für das System

$$f_0(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_2 + \sin x_1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad f_1(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Wir erhalten also

$$DV(x)f_0(x) = (2x_1 + x_2)x_2 + (x_2 + x_1)(-x_2 + \sin x_1) = x_1 x_2 + (x_1 + x_2) \sin x_1$$

und

$$DV(x)f_1(x) = x_1 + x_2$$

Die universelle Formel liefert daher

$$F(x) = -\frac{x_1 x_2 + (x_1 + x_2) \sin x_1 + \sqrt{(x_1 x_2 (x_1 + x_2) \sin x_1)^2 + (x_1 + x_2)^4}}{x_1 + x_2}.$$

Beispiel 4.9 Betrachte wiederum Artsteins Kreise, gegeben durch

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= (-x_1(t)^2 + x_2(t)^2) u(t), \\ \dot{x}_2(t) &= (-2x_1(t)x_2(t))u(t).\end{aligned}$$

Wir haben bewiesen, dass das System asymptotisch kontrollierbar, aber nicht stabilisierbar mit stetigem Feedback ist.

Wie in (4.8) angegeben, ist

$$V(x) := \sqrt{4x_1^2 + 3x_2^2} - |x_1|$$

eine nichtglatte Kontroll-Lyapunovfunktion. Dies soll jetzt noch nachgewiesen werden.

Wegen

$$\sqrt{4x_1^2 + 3x_2^2} \geq 2|x_1| \quad \text{und} \quad \sqrt{4x_1^2 + 3x_2^2} \geq \sqrt{3}|x_2|,$$

gilt

$$V(x) \geq \max(|x_1|, \sqrt{3}|x_2|) \geq \alpha_1(\|x\|_\infty)$$

mit $\alpha_1(r) = r$. Ferner ist

$$V(x) \leq \alpha_2(\|x\|_2) := 2\|x\|_2.$$

Die Funktion ist differenzierbar für $x_1 \neq 0$. Für $x_1 > 0$ berechnet man

$$DV(x)f(x, -1) = -W(x)$$

mit

$$W(x) = \frac{4|x_1|^3 + 2|x_1|x_2^2 - (x_1^2 - x_2^2)\sqrt{4x_1^2 + 3x_2^2}}{\sqrt{4x_1^2 + 3x_2^2}}.$$

Diese Funktion ist positiv für $x \neq 0$: Für $x_1^2 - x_2^2 < 0$ ist dies klar, und für $x_1^2 - x_2^2 \geq 0$ (also $|x_1| \geq |x_2|$) erhalten wir für den Zähler

$$\begin{aligned}& 4|x_1|^3 + 2|x_1|x_2^2 - (x_1^2 - x_2^2)\sqrt{4x_1^2 + 3x_2^2} \\ & \geq 4|x_1|^3 + 2|x_1|x_2^2 - (x_1^2 - x_2^2)\sqrt{4x_1^2} + \sqrt{3x_2^2} \\ & = 4|x_1|^3 + 2|x_1|x_2^2 - (x_1^2 - x_2^2)(2|x_1| + \sqrt{3}|x_2|) \\ & = 4|x_1|^3 + 2|x_1|x_2^2 - 2|x_1|^3 - \sqrt{3}x_1^2|x_2|^3 + 2x_2^2|x_1| + \sqrt{3}|x_2|^3 \\ & \geq 2|x_1|^3 + 2|x_1|x_2^2 - \sqrt{3}|x_1|^3 + 2x_2^2|x_1| + \sqrt{3}|x_2|^3 \\ & = (2 - \sqrt{3})|x_1|^3 + 4|x_1|x_2^2 + \sqrt{3}|x_2|^3 > 0.\end{aligned}$$

Wählen wir nun zu einem Anfangswert $x \in \mathbb{R}^2$ mit $x_1 \neq 0$ die Kontrollfunktion

$$u_x = -1 \text{ falls } x_1 > 0 \text{ und } u_x = 1 \text{ falls } x_1 < 0,$$

so wissen wir aus der expliziten Darstellung der Trajektorien, dass die x_1 -Komponente der Lösungen für alle Zeiten ungleich 0 bleibt. Die Ungleichung

$$DV(\varphi(t, x, u_x))f(x, u_x) \leq -W(\varphi(t, x, u_x))$$

gilt also für alle $t \geq 0$. Integration liefert

$$V(\varphi(t, x, u_x)) + \int_0^t W(\varphi(s, x, u_x)) ds \leq V(x).$$

Diese Ungleichung gilt, wegen der Stetigkeit aller Funktionen (bei festem u_x) auch für $x_1 = 0$ (sowohl für $u_x = 1$ wie für $u_x = -1$). Daher ist V eine Kontroll-Lyapunovfunktion.

Mit Theorem 4.6 können wir nun zeigen, dass keine stetig differenzierbare Kontroll-Lyapunovfunktion mit Lipschitz stetiger Ableitung existieren kann. Nehmen wir dazu an, dass V eine solche Kontroll-Lyapunovfunktion ist, d.h. es gilt die Ungleichung

$$\inf_{u \in U_C} DV(x)f(x, u) \leq -W(x)$$

für ein $C > 0$ in einer Umgebung der 0. Setzen wir $\gamma(r) = r$, so erhalten wir aus der Struktur der Gleichung

$$\begin{aligned} \inf_{u \in \mathbb{R}, |u| \leq \gamma(\|x\|)} DV(x)f(x, u) &\leq \inf_{u \in U_C} DV(x)f(x, u)\gamma(\|x\|)/C \\ &\leq -W(x)\gamma(\|x\|)/C =: -\tilde{W}(x). \end{aligned}$$

Da für die neue Funktion \tilde{W} offenbar $\tilde{W} > 0$ für $x \neq 0$ gilt, erfüllt V die Bedingung (4.11). Theorem 4.6 liefert dann die Existenz eines Lipschitz-stetigen Feedbacks, was **jedoch** nicht existiert. Deswegen kann auch V nicht existieren.

Kapitel 5

Control Sets

See Kawan [8].

Literaturverzeichnis

- [1] R. W. BROCKETT, *Asymptotic stability and feedback stabilization*, in Differential Geometric Control Theory, R. W. Brockett, R. S. Millman, and H. J. Sussmann, eds., Birkhäuser, Boston, 1983, pp. 181–191.
- [2] L. C. EVANS AND F. GARIEPY, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, CRC Press, 1992.
- [3] W. HAHN, *Theorie und Anwendung der direkten Methode von Ljapunov*, vol. 22 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, Springer-Verlag, 1959.
- [4] ———, *Stability of Motion*, Springer-Verlag, 1967.
- [5] A. ISIDORI, *Nonlinear Control Systems*, Springer-Verlag, 1998.
- [6] H. JEGGLE, *Nichtlineare Funktionalanalysis*, Teubner, 1979.
- [7] V. JURDJEVIC, *Geometric Control Theory*, Cambridge University Press, 1997.
- [8] C. KAWAN, *Invariance Entropy for Deterministic Control Systems. An Introduction*, vol. 2089 of *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, 2013.
- [9] Y. LIN, E. D. SONTAG, AND Y. WANG, *A smooth converse Lyapunov theorem for robust stability*, *SIAM J. Control Optim.*, 34 (1996), pp. 124–160.
- [10] H. NIJMEIJER AND A. J. VAN DER SCHAFT, *Nonlinear Dynamical Control Systems*, Springer-Verlag, 1990.
- [11] E. SONTAG AND A. TEEL, *Changing supply functions in input/state stable systems*, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40 (1995), pp. 1476–1478.
- [12] E. D. SONTAG, *Mathematical Control Theory*, Springer-Verlag, 1998. Second Edition (First Edition, 1990).
- [13] E. D. SONTAG AND Y. WANG, *On characterizations of the input-to-state stability property*, *Syst. Control Letters*, 24 (1995), pp. 351–359.
- [14] H. L. TRENTELMANN, A. A. STOOBVOGEL, AND M. HAUTUS, *Control Theory for Linear Systems*, Springer-Verlag, London, 2001.

- [15] F. W. WILSON, *Smoothing derivatives of functions and applications*, Trans. Amer. Math. Soc., 139 (1969), p. 413–428.