

Kontrolltheorie
Wintersemester 2014/15

Fritz Colonus

29. Januar 2015

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkung	v
1 Einleitung	1
2 Lineare Kontrollsysteme	9
2.1 Lineare Differentialgleichungen	9
2.2 Unbeschränkte Kontrollen	11
2.3 Beschränkte Kontrollen	20
2.4 Beobachtbarkeit und Dualität	24
3 Stabilität	31
3.1 Stabilität und Eigenwerte	31
3.2 Lyapunov-Funktionen	36
4 Feedback und Stabilisierung	43
4.1 Linearisierung an einem Gleichgewicht	43
4.2 Stabilisierung Linearer Kontrollsysteme	45
4.3 Störungsentkopplung	50
4.4 Ein Algorithmus für invariante Unterräume	53
4.5 Asymptotische Kontrollierbarkeit	54
4.6 Dynamische Beobachter und Stabilisatoren	56
4.7 Kontrollierbarkeitsunterräume	60
4.8 Polverschiebung unter Invarianz	64
4.9 Stabilisierbarkeitsunterräume	68
4.10 Störungsentkopplung mit Stabilität	70
5 Das Linear-Quadratische Problem	73
5.1 Das Linear-Quadratische Problem und Stabilisierung	73
5.2 Das Problem mit endlichem Horizont	76
5.3 Das Problem mit Unendlichem Horizont	79
5.4 Unendlicher Horizont mit Null-Endpunkt	82
6 H_2-Optimale Steuerung	89
6.1 H_2 -Optimale Steuerung mit Zustands-Feedback	89
6.2 Schlussbemerkungen	94
7 Das H_∞-Kontrollproblem	95
7.1 Das Problem auf endlichem Zeitintervall	98
7.2 Das Problem mit Unendlichem Horizont	101

Literaturverzeichnis

105

Vorbemerkung

Dies ist das Skript der im Wintersemester 2014/2015 am Institut für Mathematik der Universität Augsburg gehaltenen Vorlesung. Die im Literaturverzeichnis angegebenen Quellen werden ohne weitere Kennzeichnung verwendet (eine Hauptquelle ist das Buch von Trentelman, Stoorvogel und Hautus [16]).

Das Ziel dieser Vorlesung ist es, eine Einführung in Probleme der Linearen Kontrolltheorie zu geben.

Kapitel 1

Einleitung

Diese Vorlesung gibt eine Einführung in die Kontrolltheorie. Genauer handelt es sich um Probleme der Kontrolle von Systemen, die durch gewöhnliche Differentialgleichungen beschrieben werden. Standardreferenzen sind E. Sontag [15]; D. Hinrichsen und A.J. Pritchard [8], und Trentelman, Stoorvogel und Hautus [16], S. Sastry [13], und speziell für nichtlineare Kontrollsysteme sind auch insbesondere die Bücher V. Jurdjevic [10], Nijmeijer/Van der Schaft [12] und Isidori [9] zu nennen.

Zunächst werden wir ein einfaches und klassisches Beispiel aus der Mechanik diskutieren, das mathematische Pendel oder, moderner interpretiert, die Bewegung eines Roboterarms. Dabei treten bereits eine Reihe typischer Probleme und Konzepte der Kontrolltheorie auf. Eine ausführliche Herleitung der Differentialgleichung für das Pendel findet man in Aulbach [2, Beispiel 1.3.3], vergleiche auch Sontag [15, Chapter 1].

Wir betrachten ein Pendel, das aus einer masselosen starren Stange und einem daran befestigten Massepunkt besteht. Das Pendel soll sich unter dem Einfluss der senkrecht nach unten wirkenden Schwerkraft befinden. Wir bezeichnen die Winkelposition des Pendels mit $\varphi \in [0, 2\pi)$, so dass $\dot{\varphi}(t)$ die Winkelgeschwindigkeit und $\ddot{\varphi}(t)$ die Winkelbeschleunigung zum Zeitpunkt t bezeichnet. Die Lage, Geschwindigkeit und Beschleunigung des Punktes M des sich auf dem Kreis mit Radius l bewegenden Punktes erhält man einfach durch Multiplikation von $\varphi(t)$, $\dot{\varphi}(t)$ und $\ddot{\varphi}(t)$ mit l . Zur Herleitung einer Differentialgleichung für φ benutzen wir das Newtonsche Kraftgesetz:

$$\text{Kraft} = \text{Masse mal Beschleunigung}$$

zu jedem Zeitpunkt t . Hier ist Masse mal Beschleunigung gegeben durch

$$ml\ddot{\varphi}(t).$$

Die zur Zeit t wirkende Kraft ist die tangentielle Komponente der (nach unten gerichteten) Schwerkraft $-mg$, also

$$-mg \sin \varphi(t).$$

Darüberhinaus berücksichtigen wir eine Reibungskraft, die der momentanen Geschwindigkeit proportional und entgegengesetzt ist, also

$$-k\dot{\varphi}(t)$$

mit einer Proportionalitätskonstanten k (dies ist eine stark vereinfachende Annahme! Die Modellierung von Reibungskräften ist sehr schwierig). Wir erhalten nach Newton also

$$-mg \sin \varphi(t) - k\dot{\varphi}(t) = ml\ddot{\varphi}(t)$$

oder

$$\ddot{\varphi}(t) = -\frac{k}{lm}\dot{\varphi} - \frac{g}{l} \sin \varphi.$$

Wir nehmen jetzt zusätzlich an, dass ein Motor am Drehpunkt angebracht ist, der eine Kraft (oder ein Drehmoment) $u(t)$ auf den Roboterarm ausübt. Dann modifiziert sich die Gleichung zu

$$\ddot{\varphi}(t) = -\frac{k}{m}\dot{\varphi} - \frac{g}{l} \sin \varphi + u(t).$$

In dieser Gleichung entspricht $\varphi = 0$ dem senkrecht nach unten hängenden Roboterarm und $\varphi = \pi$ dem senkrecht nach oben stehenden Roboterarm. Wir interessieren uns für die Position $\varphi = \pi$. Der Einfachheit halber normieren wir die Konstanten $m = g = l = 1$, so dass

$$\ddot{\varphi}(t) = -k\dot{\varphi} - \sin \varphi + u(t).$$

Setzen wir $\vartheta = \varphi - \pi$, so ändern sich die Gleichungen zu

$$\ddot{\vartheta}(t) = -k\dot{\vartheta}(t) - \sin[\vartheta(t) + \pi] + u(t).$$

Die Ruhelage in der senkrechten Position $\vartheta(t) \equiv 0$ mit Geschwindigkeit $\dot{\vartheta} \equiv 0$ ist offenbar eine Lösung dieser Differentialgleichung für $u(t) \equiv 0$. Aus offensichtlichen physikalischen Gründen ist diese Ruhelage bei $u = 0$ "instabil". Unser Kontrollproblem (Steuerungs- oder Regelungsproblem) besteht darin, kleine Abweichungen aus dieser Ruhelage durch geeignete Wahl von u zu korrigieren. Der Sinus-Term ist nichtlinear; wir können aber ein lineares System herleiten, indem wir für "kleine" Abweichungen $\varphi \approx \pi$ die Approximation $\sin \varphi \approx -(\varphi - \pi)$ benutzen, oder für ϑ nahe 0

$$\sin[\vartheta + \pi] \approx -\vartheta.$$

Man erhält

$$\ddot{\vartheta}(t) + k\dot{\vartheta}(t) - \vartheta(t) = u(t).$$

Schreiben wir

$$x_1(t) = \vartheta(t) \text{ und } x_2(t) = \dot{\vartheta}(t)$$

so erhält man

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -kx_2 + x_1 + u(t) \end{aligned}$$

oder

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t).$$

Wir erwarten natürlich, dass diese Gleichung das Verhalten des Ausgangssystems in der Nähe der (oberen) Ruhelage annähernd beschreibt. Dieses Vorgehen (Linearisierung des Systems) werden wir später mathematisch analysieren. Jetzt beschränken wir uns auf die Analyse der linearisierten Gleichung.

Unser Ziel ist es, das System durch geeignete Wahl von u für $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ möglichst schnell und mit möglichst wenig Oszillationen wieder nach $(0, 0)$ zu bringen.

Ansatz:

$$u = -\alpha x_1 \text{ mit } \alpha > 0.$$

Dies nennt man ein *proportionales Feedback* mit dem "Feedback-Gain" α . Einsetzen liefert

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (-\alpha x_1)$$

oder

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - \alpha & -k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Zur Vereinfachung nehmen wir jetzt an, dass $k = 0$ gilt. Dann

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - \alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

oder

$$\ddot{\vartheta} = (1 - \alpha)\vartheta.$$

Die Eigenwerte von $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - \alpha & 0 \end{pmatrix}$ sind die Lösungen von

$$z^2 + \alpha - 1 = 0,$$

für $\alpha > 1$ also

$$z_{1,2} = \pm i\sqrt{\alpha - 1}.$$

Daher sind für $\alpha > 1$ die Lösungen Ellipsen. Für $\alpha < 1$ gehen alle Lösungen betragsmäßig gegen ∞ , außer denen mit

$$x_2(0) = -x_1(0)\sqrt{1 - \alpha}.$$

Für $\alpha = 1$ sind alle Anfangswerte mit $x_2(0) = 0$ Ruhelagen (also $\dot{\varphi}(0) = 0$ liefert $\dot{\varphi}(t) = 0$ für alle t).

Wir sehen also, dass proportionales Feedback hier *nicht* funktioniert. Wir werden einen "Dämpfungsterm" hinzufügen:

Ansatz:

$$u(t) = -\alpha x_1(t) - \beta x_2(t)$$

mit $\alpha > 1$ und $\beta > 1$. Dies ist ein **PD**-Feedback (proportional-derivative). Man beachte, dass zur Implementierung dieses Feedbacks nicht nur der momentane Zustand $x_1(t) = \vartheta(t)$, sondern auch seine Geschwindigkeit $x_2(t) = \dot{\vartheta}(t)$ gemessen werden muss.

Einsetzen liefert

$$\ddot{\vartheta} + \beta\dot{\vartheta} + (\alpha - 1)\vartheta = 0$$

oder

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - \alpha & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Die zugehörigen Eigenwerte sind

$$z_{1,2} = -\frac{\beta}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\beta^2 - 4(\alpha - 1)}.$$

Ist $\beta^2 - 4(\alpha - 1) \leq 0$, so ist der Realteil der Eigenwerte gleich $-\frac{\beta}{2} < 0$, die Lösungen konvergieren dann für $t \rightarrow \infty$ gegen 0. Will man auch Oszillationen um den Nullpunkt vermeiden, so muss $\beta^2 - 4(\alpha - 1) > 0$ gewählt werden; auch dann haben beide Eigenwerte negativen Realteil.

Das PD-Feedback stabilisiert also das linearisierte System; wir werden später sehen, dass es in einer Umgebung der Ruhelage auch für das nichtlineare Systeme funktioniert. Dies ist ein Beispiel eines allgemeinen Linearisierungsprinzips in der Kontrolltheorie:

*Designs, die auf Linearisierung beruhen,
funktionieren lokal für das nichtlineare System.*

Dieses Prinzip oder „Metatheorem“, das jeweils unter entsprechenden Voraussetzungen zu präzisieren ist, liefert die Rechtfertigung für das intensive Studium linearer Kontrollsysteme.

Unser obige PD-Kontrolle hat die Form eines Feedbacks, ist also vom augenblicklichen Zustand x des Systems abhängig. Eine Alternative sind zeitabhängige Kontrollen u , die nur von t abhängen, nicht von x . Die folgende Überlegung demonstriert, warum man bei Stabilisierungsproblemen Feedback verwenden muss.

Betrachte das linearisierte System (mit $k = 0$)

$$\ddot{\vartheta}(t) - \vartheta(t) = u(t).$$

mit festem Anfangswert

$$\vartheta(0) = 1, \quad \dot{\vartheta}(0) = -2.$$

Die Steuerung

$$u(t) = 3 e^{-2t}$$

liefert die Lösung

$$\vartheta(t) = e^{-2t},$$

wie man durch Einsetzen nachprüft:

$$\dot{\vartheta} = -2e^{-2t}, \quad \ddot{\vartheta} = 4e^{-2t}$$

also

$$\vartheta(0) = 1, \quad \dot{\vartheta}(0) = -2, \quad \ddot{\vartheta}(t) - \vartheta(t) = 4e^{-2t} - e^{-2t} = 3e^{-2t} = u(t).$$

Die Lösung konvergiert dann für $t \rightarrow \infty$ gegen $(0, 0)^\top$. Ist der Anfangswert jedoch

$$\vartheta(0) = 1, \quad \dot{\vartheta}(0) = -2 + \varepsilon, \quad \text{mit } \varepsilon \neq 0,$$

so führt Anwendung derselben Steuerung zu unbeschränkten Lösungen.

(**Übungsaufgabe!** Hinweis: Beachte, dass

$$\frac{d}{dt} \sinh t = \cosh t \text{ und } \frac{d}{dt} \cosh t = \sinh t.)$$

Kleine Änderungen oder Ungenauigkeiten in den Startwerten führen also dazu, dass die (vorab berechnete) Steuerung wertlos für Stabilisierung wird. Bei der PD-Regelung tritt dieses Problem, wie oben gesehen, nicht auf.

Das linearisierte Kontrollsystem lässt sich in der Form

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

mit

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

schreiben. Kontrollsysteme dieser Form mit konstanten Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ heißen lineare autonome (oder zeitinvariante) Kontrollsysteme von endlicher Dimension in stetiger Zeit (dies bedeutet implizit, dass es auch nichtlineare und nichtautonome Kontrollsysteme und solche von unendlicher Dimension und solche in diskreter Zeit gibt). In dieser Vorlesung werden wir uns mit linearen und nichtlinearen Kontrollsystemen der Form

$$\dot{x} = f(x, u)$$

von endlicher Dimension beschäftigen. Hierbei ist u eine von der Zeit t abhängige Funktion $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ oder ein Feedback der Form $u = Fx$. Für das obige lineare Kontrollsystem haben wir ein Feedback der Form

$$u = Fx = \begin{pmatrix} -\alpha & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

konstruiert. Einsetzen in das *open-loop* System $\dot{x} = Ax + Bu$ ergibt das *closed-loop* oder Feedback-System

$$\dot{x} = (A + BF)x.$$

Bei geeigneter Wahl von F haben alle Eigenwerte, also die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\chi_{A+BF}(z) = \det[zI - (A + BF)],$$

negative Realteile. Dies garantiert, dass alle Lösungen für $t \rightarrow \infty$ gegen 0 laufen.

Dies führt auf das allgemeine Problem:

Gegeben seien Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$; charakterisiere die Mengen von Eigenwerten, wenn F alle Matrizen in $\mathbb{R}^{m \times n}$ durchläuft.

Der für die lineare Systemtheorie zentrale *Polverschubbungssatz*, löst dieses Problem.

Häufig ist nicht der gesamte Zustand des Systems einer Messung zugänglich und damit für ein Feedback verwendbar. Während das PD-Feedback für das

invertierte Pendel zum Beispiel den gesamten Zustand $x = (x_1, x_2) = (\vartheta, \dot{\vartheta})$ des Systems verwendet, benutzt das P -Feedback nur $x_1 = \vartheta$. Definiert man hier

$$C : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1, \text{ also in Matrizendarstellung } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix},$$

so erhält man ein lineares System *mit Output*

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx.$$

Eine lineares Feedback der Form

$$u = Ky = KCx \text{ mit einer Matrix } K \text{ der entsprechenden Dimension,}$$

wird als *statisches Output-Feedback* bezeichnet (entsprechend wird u auch als *Input* bezeichnet). Feedbacks dieser Form sind meist nicht geeignet (wie oben gesehen), das Stabilisierungsproblem zu lösen. Stattdessen führt jedoch häufig ein *dynamisches Output-Feedback* zum Erfolg: Man benutzt eine Differentialgleichung (einen *dynamischen Beobachter*), um aus dem Output den Zustand zu schätzen, und verwendet dann diese Schätzung im Feedback. Diese Konstruktion ist sogar nützlich, wenn alle Zustandsvariablen im Feedback zur Verfügung stehen, jedoch Störungen auf das System wirken. Als Illustration soll wieder das linearisierte invertierte Pendel dienen, auf das eine konstante additive Störung (zum Beispiel Wind) $d(t) \equiv d \in \mathbb{R}$ wirkt:

$$\ddot{\vartheta}(t) - \vartheta(t) = u(t) + d.$$

Eine PD-Kontrolle

$$u = -\alpha\vartheta - \beta\dot{\vartheta}, \quad \alpha, \beta > 1,$$

stabilisiert das System für $d = 0$. Ist jedoch $d \neq 0$, so gilt für keine Lösung des Feedback-Systems

$$\ddot{\vartheta}(t) - \vartheta(t) + \alpha\vartheta(t) + \beta\dot{\vartheta}(t) = d,$$

dass $\vartheta(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$. Dies liest man aus der Lösungsformel für diese Gleichung ab: Mit $x = (x_1, x_2)^\top = (\vartheta, \dot{\vartheta})^\top$ ist

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= (1 - \alpha)x_1 - \beta x_2, \end{aligned}$$

das heißt

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - \alpha & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix}$$

oder

$$\dot{x} = Gx + \bar{d}$$

mit

$$G := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - \alpha & -\beta \end{pmatrix}, \quad \bar{d} := \begin{pmatrix} 0 \\ d \end{pmatrix}.$$

Man rechnet direkt nach (dies ist gegeben durch die Variation-der-Parameter-Formel), dass

$$x(t) = e^{Gt}x(0) + \int_0^t e^{G(t-s)} ds \cdot \bar{d}.$$

Da das obige PF-Feedback das homogene System stabilisiert, gilt

$$e^{Gt}x(0) \rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow \infty.$$

Weil aber die zweite Komponente von $\int_0^t e^{G(t-s)} ds$ für $t \rightarrow \infty$ nicht gegen 0 geht (warum?), konvergiert $x(t)$ nicht gegen 0.

Wir können d als zusätzliche Zustandsvariable auffassen, das System hat also die Form

$$\begin{aligned} \dot{d}(t) &= 0, \\ \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) + d(t) + u(t). \end{aligned}$$

Weil d nicht für das Feedback verwendet werden kann, konstruieren wir ein dynamisches Zustandsfeedback. Wähle mit $\alpha, \beta, \mu \in \mathbb{R}$ als Feedback

$$u = -\alpha x_1 - \beta x_2 - \mu x_0,$$

wobei x_0 eine Lösung von

$$\dot{x}_0 = x_1$$

ist. In der Tat (siehe Sontag [14, Exercise 1.6.3]) gibt es Zahlen $\alpha, \beta, \mu \in \mathbb{R}$, so dass für alle $d \in \mathbb{R}$ die Lösungen von

$$\begin{aligned} \dot{x}_0(t) &= x_1(t), \\ \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= -\mu x_0(t) + (1 - \alpha)x_1(t) - \beta x_2(t) + d \end{aligned}$$

für $t \rightarrow \infty$ gegen $(\frac{d}{\mu}, 0, 0)$ konvergieren. Die Komponenten $x_1 = \vartheta$ und $x_2 = \dot{\vartheta}$ konvergieren, wie gewünscht, für $t \rightarrow \infty$ also gegen 0. In den ursprünglichen Variablen ist die Kontrolle gegeben durch

$$u(t) = -\alpha \vartheta - \beta \dot{\vartheta} - \mu \int_0^t \vartheta(s) ds$$

Dies ist auch als PID-Regler (proportional-integral-derivative) bekannt, ein in zahlreichen Anwendungen von Ingenieuren verwendeter Regler. Teil dieses Reglers ist die Differentialgleichung $\dot{x}_0 = x_1$. Diese Konstruktionen werden wir später systematisch untersuchen.

Kapitel 2

Lineare Kontrollsysteme

In diesem Kapitel werden wir lineare Kontrollsysteme analysieren, wobei wir u als zeitabhängige Steuerungsfunktion betrachten. Zunächst studieren wir Kontrollierbarkeitseigenschaften, wobei wir zunächst keine Beschränkungen an die Kontrollfunktionen fordern, so dass wir mit Hilfsmitteln der linearen Algebra auskommen. Danach Abschnitt werden wir den Wertebereich der Kontrollfunktionen einschränken und den Begriff der Kontrollmengen einführen. Lineare Kontrollsysteme haben die Form

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.1)$$

mit Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$; die Funktionen $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißen Kontroll- oder Steuerfunktionen oder Inputs, und können frei in einer Menge \mathcal{U} zulässiger Kontrollfunktionen gewählt werden. Von Interesse ist zunächst das Verhalten des Systems unter beliebigen Kontrollfunktionen. Die Punkte $x \in \mathbb{R}^n$ werden als Zustände des Systems bezeichnet. Häufig wird die Systembeschreibung noch ergänzt durch Outputs

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

mit Matrizen $C \in \mathbb{R}^{k \times n}$ und $D \in \mathbb{R}^{k \times m}$; dazu später mehr.

Natürlich kann man A und B auch als lineare Abbildungen auf \mathbb{R}^n bzw. von \mathbb{R}^m nach \mathbb{R}^n auffassen. Wir beginnen damit einige Eigenschaften linearer Differentialgleichungen herzuleiten (die Beweise sind hier einfacher als für allgemeine gewöhnliche Differentialgleichungen).

2.1 Lineare Differentialgleichungen

Wir betrachten die folgende Klasse von Differentialgleichungen.

Definition 2.1 Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Eine differenzierbare Funktion $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt Lösung der (linearen autonomen) Differentialgleichung in \mathbb{R}^n

$$\dot{x} = Ax, \quad (2.2)$$

falls für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t)$$

gilt.

Aus den Grundveranstaltungen ist bekannt, dass die Matrix-Exponentialfunktion

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k$$

eine Potenzreihe in $\mathbb{R}^{n \times n}$ (identifiziert mit \mathbb{R}^{n^2}) mit Konvergenzradius ∞ ist und dass gilt:

$$e^{A0} = I, \quad e^{A(t+s)} = e^{At}e^{As} \quad \text{sowie} \quad Ae^{At} = e^{At}A \quad \text{für alle } t, s \in \mathbb{R}.$$

Ferner dürfen wir die Reihe gliedweise differenzieren. Es folgt

$$\frac{d}{dt}e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{t^{k-1}}{k!} A^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} A^k = A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = Ae^{At}. \quad (2.3)$$

Daher gilt das folgende Resultat.

Proposition 2.2 Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Für jedes $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ist

$$x(t) = e^{At}x_0 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} t^k \right) x_0 \quad (2.4)$$

die eindeutige Lösung von (2.2) mit $x(0) = x_0$.

Beweis. Nach (2.3) gilt für x aus (2.4)

$$\frac{d}{dt}x(t) = \left(\frac{d}{dt}e^{At} \right) x_0 = Ae^{At}x_0 = Ax(t).$$

Zum Beweis der Eindeutigkeit sei $y(t)$ eine beliebige Lösung mit $y(0) = x_0$. Aus der Produktregel ergibt sich

$$\frac{d}{dt}e^{-At}y(t) = -e^{-At}Ay(t) + e^{-At}\dot{y}(t) = -e^{-At}Ay(t) + e^{-At}Ay(t) = 0.$$

Demnach ist $e^{-At}y(t)$ konstant in t , und wegen $e^{-A0}y(0) = x_0$ folgt also

$$e^{-At}y(t) = x_0 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Multiplikation von links mit e^{At} liefert dann $y(t) = e^{At}x_0 = x(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und damit die Behauptung. ■

Die Aussage dieser Proposition wird auch so formuliert: das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0,$$

besitzt eine eindeutige Lösung auf \mathbb{R} .

Als nächstes betrachten wir die inhomogene Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{mit Anfangswert } x(t_0) = x_0,$$

wobei $t_0 \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$ sowie eine stetige Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben sind. Die eindeutige Lösung erhält man aus der folgenden Variation-der-Parameter-Formel:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}f(s)ds, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

In der Tat: Differenzieren dieser Funktion (dies ist erlaubt!) liefert mit der Produktregel

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{d}{dt}e^{A(t-t_0)} + \frac{d}{dt}e^{At} \cdot \int_{t_0}^t e^{-As} f(s) ds + e^{At} \cdot \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t e^{-As} f(s) ds \\ &= Ae^{A(t-t_0)}x_0 + Ae^{At} \cdot \int_{t_0}^t e^{-As} f(s) ds + e^{At} \cdot e^{-At} f(t) \\ &= A \left[e^{A(t-t_0)}x_0 + e^{At} \cdot \int_{t_0}^t e^{-As} f(s) ds \right] + f(t) \\ &= Ax(t) + f(t).\end{aligned}$$

Die Eindeutigkeit der Lösung folgt, weil die Differenz zweier Lösungen die homogene Differentialgleichung erfüllt und damit verschwindet.

Die Variation-der-Parameter-Formel (2.5) kann man auch unter viel schwächeren Bedingungen an die Funktion f hinschreiben. Stückweise Stetigkeit oder auch nur Integrierbarkeit auf jedem kompakten Intervall reicht aus. Auch dann nennt man die dadurch gegebene Funktion eine Lösung der linearen Differentialgleichung.

2.2 Kontrollierbarkeit bei unbeschränkten Kontrollen

Wir kehren zu linearen Kontrollsystemen der Form (2.1)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

zurück. Die Lösungen $\varphi(t, t_0, x_0, u)$ von (2.1) zum Anfangswert $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ sind (nach der Variation der Konstanten-Formel gegeben durch

$$\varphi(t, t_0, x_0, u) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}Bu(s) ds, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.6)$$

Dieses Integral ist natürlich nicht für alle Funktionen $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ wohldefiniert. Offenbar reicht es, dass sie Lebesgue-integrierbar auf jedem Intervall $[0, t]$ sind. Dann ist auch das Produkt mit der beschränkten, stetigen Funktion $e^{A(t-s)}B$, $s \in [0, t]$, Lebesgue-integrierbar. Manchmal verlangt man auch mehr Regularität, zum Beispiel, dass sie stetig, stückweise stetig, stückweise konstant, oder unendlich oft differenzierbar sind.

Standardvoraussetzungen an die Kontrollfunktionen sind, dass \mathcal{U} einer der folgenden Funktionenräume ist:

$$\begin{aligned}L_{1,loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) &= \{u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m, \text{ auf jedem kompakten Intervall integrierbar}\} \\ L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) &= \{u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m, \text{ essentiell beschränkt}\} \\ L_{\infty,loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) &= \{u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m, \text{ auf jedem komp. Intervall ess. beschränkt}\} \\ C_{pc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) &= \{u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m, u \text{ ist stückweise stetig}\}\end{aligned}$$

Die Funktionen in $L_{1,loc}$ nennt man auch lokal integrierbar. Man beachte, dass die Wahl von $\mathcal{U} = L_1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ bezüglich des Verhaltens für $|t| \rightarrow \infty$ einschränkend ist. Natürlich kann man auch weitere Anforderungen an die Kontrollfunktionen stellen, zum Beispiel, dass ihre Werte in einer vorgegebenen Menge

$U \subset \mathbb{R}^m$ liegen, also $u(t) \in U$ für fast alle $t \in \mathbb{R}$ (zum Beispiel $|u(t)| \leq 1$). Wir werden diese Situation später diskutieren (dies führt jedoch schon über den Bereich der linearen Kontrolltheorie hinaus, die zunächst nur eine Theorie für Matrizenpaare (A, B) ist).

Wir werden in diesem Kapitel, soweit nichts anderes gesagt wird,

$$\mathcal{U} = C_{pc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$$

wählen. Es wird sich herausstellen, dass dabei nichts Wesentliches verloren geht.

Ist in (2.6) die Anfangszeit $t_0 = 0$, so bezeichnen wir die Lösung (oder Trajektorie) auch häufig mit $\varphi(t, x_0, u)$, $t \in \mathbb{R}$. Offenbar gilt wegen (2.6) (setze im Integral $s := s - t_0$)

$$\begin{aligned} \varphi(t, t_0, x_0, u) &= e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}Bu(s) ds \\ &= e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_0^{t-t_0} e^{A(t-t_0-s)}Bu(s+t_0) ds \\ &= \varphi(t-t_0, x_0, u(\cdot+t_0)), \end{aligned}$$

mit der verschobenen Kontrollfunktion $u(\cdot+t_0)(s) := u(s+t_0)$, $s \in \mathbb{R}$.

Eine grundlegende Frage an Kontrollsysteme sind Kontrollierbarkeits- oder Erreichbarkeitsfragen: Gegeben ein Startpunkt x_0 , welche Punkte $x_1 \in \mathbb{R}^n$ kann man mit zulässigen Kontrollfunktionen erreichen?

Definition 2.3 *Ein Zustand $x_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt kontrollierbar (oder steuerbar) nach $x_1 \in \mathbb{R}^n$ zur Zeit $T \geq 0$, falls eine Kontrolle $u \in \mathcal{U}$ existiert mit $\varphi(T, x_0, u) = x_1$. Der Zustand x_1 heißt dann auch erreichbar von x_0 in der Zeit T .*

Wir definieren die Menge der Punkte, die von x_0 in der Zeit T erreichbar sind, als

$$\mathcal{O}_T^+(x_0) = \{x_1 \in \mathbb{R}^n, \text{ es gibt } u \in \mathcal{U} \text{ mit } x_1 = \varphi(T, x_0, u)\},$$

und die Menge der Punkte, die in der Zeit T nach x_1 gesteuert (oder kontrolliert) werden können, als

$$\mathcal{O}_T^-(x_1) = \{x_0 \in \mathbb{R}^n, \text{ es gibt } u \in \mathcal{U} \text{ mit } x_1 = \varphi(T, x_0, u)\}.$$

Offenbar ist $x \in \mathcal{O}^+(x_0)$ äquivalent zu $x_0 \in \mathcal{O}_T^-(x)$. Speziell schreiben wir in diesem Kapitel auch

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(T) &= \mathcal{O}_T^+(0) \text{ und } \mathcal{R} = \bigcup_{T \geq 0} \mathcal{R}(T); \\ \mathcal{C}(T) &= \mathcal{O}_T^-(0) \text{ und } \mathcal{C} = \bigcup_{T \geq 0} \mathcal{C}(T). \end{aligned}$$

Von besonderem Interesse sind Systeme, bei denen jeder Punkt erreichbar oder kontrollierbar ist. Diese werden wir jetzt charakterisieren. Zunächst zeigen wir das folgende Lemma.

Lemma 2.4 *Sei $S > T > 0$. Dann gilt: (i) $\mathcal{R}(T) \subset \mathcal{R}(S)$; (ii) $(\mathcal{R}(S) = \mathcal{R}(T)) \Rightarrow (\mathcal{R}(S) = \mathcal{R}(t) \text{ für alle } t \geq S)$; (iii) $\mathcal{R}(T)$ und \mathcal{R} sind Unterräume.*

Beweis. (i) Für $y \in \mathcal{R}(T)$ existiert $u \in \mathcal{U}$ mit $y = \varphi(T, 0, u)$. Definiere $v \in \mathcal{U}$ durch

$$v(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \in [0, S - T] \\ u(t - S + T) & \text{für } t \in [S - T, S] \end{cases}$$

Dann ist $y = \varphi(S, 0, v) \in \mathcal{R}(S)$ („Man bleibt im Nullpunkt so lange wie nötig sitzen.“)

(iii) Seien $y_1, y_2 \in \mathcal{R}(T)$. Dann existieren Kontrollen $u_1, u_2 \in \mathcal{U}$ mit

$$y_i = \varphi(T, 0, u) = \int_0^T e^{A(T-s)} B u_i(s) ds \text{ für } i = 1, 2$$

und damit (wegen der Linearität in u)

$$y_1 + y_2 = \int_0^T e^{A(T-s)} B [u_1(s) + u_2(s)] ds = \varphi(t, 0, u_1 + u_2).$$

Wegen der Linearität in u gilt für $\lambda \in \mathbb{R}$, dass $\lambda y_1 = \varphi(T, 0, \lambda u) \in \mathcal{R}(T)$. Daher ist $\mathcal{R}(T)$ ein Untervektorraum. Seien nun $y_1, y_2 \in \mathcal{R}$. Mit (i) können wir annehmen, dass $y_1, y_2 \in \mathcal{R}(T)$ für ein $T > 0$, also $y_1 + y_2 \in \mathcal{R}(T) \subset \mathcal{R}$.

(ii) Es gelte $\mathcal{R}(S) = \mathcal{R}(T)$. Wir zeigen, dass $\mathcal{R}(2S - T) = \mathcal{R}(S)$. Für $x \in \mathcal{R}(2S - T)$ existiert $u \in \mathcal{U}$ mit

$$x = \varphi(2S - T, 0, u) = \int_0^{2S-T} e^{A(2S-T-s)} B u(s) ds.$$

Weil $\varphi(S, 0, u) \in \mathcal{R}(S) = \mathcal{R}(T)$, existiert $v \in \mathcal{U}$ mit

$$\varphi(S, 0, u) = \varphi(T, 0, v) = \int_0^T e^{A(T-s)} B v(s) ds.$$

(„wir sparen die Zeit $S - T$ ein.“) Definiere $w \in \mathcal{U}$ durch

$$w(t) = \begin{cases} v(t) & \text{für } t \in [0, T] \\ u(t - T + S) & \text{für } t \in [T, S] \end{cases}.$$

Dann ist (wegen der Zeitinvarianz)

$$\begin{aligned} \varphi(S, 0, w) &= \int_0^T e^{A(S-s)} B w(s) ds + \int_T^S e^{A(S-s)} B w(s) ds \\ &= e^{A(S-T)} \int_0^T e^{A(T-s)} B v(s) ds + \int_T^S e^{A(S-s)} B u(s - T + S) ds \\ &= e^{A(S-T)} \int_0^T e^{A(S-s)} B u(s) ds + \int_S^{2S-T} e^{A(2S-T-s)} B u(s) ds \\ &= \int_0^T e^{A(2S-T-s)} B u(s) ds + \int_S^{2S-T} e^{A(2S-T-s)} B u(s) ds \\ &= \varphi(2S - T, 0, u) = x \end{aligned}$$

(hier haben wir $\varphi(S, 0, u) = \varphi(T, 0, v)$ und die Transformation $s' = s - T + S$ verwendet). Daher ist $x \in \mathcal{R}(S)$ und es folgt

$$\mathcal{R}(2S - T) = \mathcal{R}(S) \text{ und es gilt } 2T - S > S.$$

Durch Induktion erhält man $\mathcal{R}(nS - T) = \mathcal{R}(S)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit (i) folgt $\mathcal{R}(t) = \mathcal{R}(S)$ für alle $t \geq S$. ■

Weil $\mathcal{R}(t)$ ein linearer Unterraum von \mathbb{R}^n ist und (ii) in dem obigen Lemma gilt, folgt $\mathcal{R}(t) = \mathcal{R}$ für alle $t > 0$, denn die Dimension von $\mathcal{R}(t)$ wächst monoton in t und kann nur endliche viele Werte annehmen.

Proposition 2.5 *Es ist $\mathcal{R} = \mathbb{R}^n$ genau dann, wenn für alle $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ und alle $t > 0$ eine Kontrolle $u \in \mathcal{U}$ existiert mit $x_1 = \varphi(t, x_0, u)$.*

Beweis. Betrachte $x_1 - \varphi(t, x_0, 0) \in \mathbb{R}^n = \mathcal{R}(t)$. Dann existiert $u \in \mathcal{U}$ mit

$$x_1 - \varphi(t, x_0, 0) = \varphi(t, 0, u),$$

also

$$x_1 = \varphi(t, x_0, 0) + \varphi(t, 0, u) = \varphi(t, x_0, u). \quad (2.7)$$

■

Wir haben damit insbesondere gezeigt, dass hier $\mathbb{R}^n = \mathcal{O}_t^+(x_0)$ für ein $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$, genau dann gilt, wenn es für alle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und alle $t > 0$ gilt. Analoge Aussage gelten für $\mathcal{C}(T)$ und \mathcal{C} sowie $\mathcal{O}_t^-(x_0)$.

Wir werden jetzt $\mathcal{R}(t)$ charakterisieren.

Lemma 2.6 *Sei $V \subset \mathbb{R}^n$ ein linearer Unterraum und A eine lineare Abbildung auf \mathbb{R}^n . Dann ist der kleinste A -invariante Unterraum, der V enthält, gegeben durch*

$$\langle A \mid V \rangle = V + AV + \dots + A^{n-1}V.$$

Beweis. Die Menge der A -invarianten Unterräume, die V enthalten, ist nicht leer (\mathbb{R}^n ist solch ein Unterraum) und der Durchschnitt von solchen Unterräumen ist wieder von diesem Typ, also existiert der kleinste Unterraum von diesem Typ. Wegen der A -Invarianz folgt $A^k V \subset \langle A \mid V \rangle$ für alle $k \in \mathbb{N}$, und daher gilt "⊃". Für die Umkehrung ist nur zu zeigen, dass $V + AV + \dots + A^{n-1}V$ A -invariant ist. Das charakteristische Polynom χ_A ist

$$\chi_A(z) = \det(zI - A) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$$

mit Koeffizienten $a_i \in \mathbb{R}$. Nach dem Satz von Cayley-Hamilton ist

$$\chi_A(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A + a_0I = 0,$$

und daher

$$A^n V = (-a_{n-1}A^{n-1} - \dots - a_1A - a_0I) V \subset V + AV + \dots + A^{n-1}V.$$

Daraus folgt die A -Invarianz von $V + AV + \dots + A^{n-1}V$. ■

Wir werden jetzt eine nützliche Charakterisierung von $\langle A \mid \text{Im } B \rangle$ herleiten. Definiere für $t > 0$ eine Matrix in $\mathbb{R}^{n \times n}$ durch

$$W_t = \int_0^t e^{A\tau} B B^\top e^{A^\top \tau} d\tau$$

(hierbei bedeutet $^\top$ Transposition einer Matrix). Diese Matrix ist symmetrisch und sie ist positiv semidefinit, weil für $x \in \mathbb{R}^n$

$$x^\top W_t x = \int_0^t x^\top e^{A\tau} B B^\top e^{A^\top \tau} x d\tau = \int_0^t \left| B^\top e^{A^\top \tau} x \right|^2 d\tau,$$

wobei $|\cdot|$ die euklidische Norm bezeichnet. Wir identifizieren W_t mit der dadurch (bezgl. der kanonischen Basis in \mathbb{R}^n) definierten linearen Abbildung.

Lemma 2.7 Für alle $t > 0$ ist $\langle A \mid \text{Im } B \rangle = \text{Im } W_t$.

Beweis. Die Behauptung ist dazu äquivalent, dass die orthogonalen Komplemente übereinstimmen, $\langle A \mid \text{Im } B \rangle^\perp = [\text{Im } W_t]^\perp$.

„ \subset “: Sei $x \in \langle A \mid \text{Im } B \rangle^\perp$. Dann ist $x^\top A^k B = 0$ für alle $k = 0, 1, \dots$ und daher

$$x^\top e^{At} B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^\top A^k B = 0 \text{ für alle } t \geq 0.$$

Dann folgt $x^\top W_t = \int_0^t x^\top e^{A\tau} B B^\top e^{A^\top \tau} d\tau = 0$, also $x \in [\text{Im } W_t]^\perp$.

„ \supset “: Sei $x \in [\text{Im } W_t]^\perp$ für ein $t > 0$. Dann ist

$$0 = x^\top W_t x = \int_0^t |B^\top e^{A^\top \tau} x|^2 d\tau,$$

und daher

$$0 = x^\top e^{At} B \text{ für alle } t \geq 0. \quad (2.8)$$

Insbesondere ist für $t = 0$

$$x^\top B = 0.$$

Sukzessives Differenzieren in (2.8) und Auswerten in $t = 0$ liefert

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} x^\top e^{At} B \Big|_{t=0} = x^\top [A e^{At}] \Big|_{t=0} B = x^\top A B \\ 0 &= \frac{d^2}{dt^2} x^\top e^{At} B \Big|_{t=0} = x^\top [A^2 e^{At}] \Big|_{t=0} B = x^\top A^2 B \\ &\dots \\ 0 &= \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} x^\top e^{At} B \Big|_{t=0} = x^\top [A^{n-1} e^{At}] \Big|_{t=0} B = x^\top A^{n-1} B. \end{aligned}$$

Insgesamt folgt, dass x senkrecht auf $\text{Im } B + A \text{Im } B + \dots + A^{n-1} \text{Im } B = \langle A \mid \text{Im } B \rangle$ steht. ■

Der nächste Satz charakterisiert die Erreichbarkeitsmenge vom Ursprung.

Theorem 2.8 Für das System (2.1) gilt

$$\mathcal{R} = \mathcal{C} = \text{Im}[B \ AB \ \dots \ A^{n-1} B] = \langle A \mid \text{Im } B \rangle.$$

Beweis. Die letzte Gleichung folgt aus Lemma 2.6. Wir zeigen nur $\mathcal{R}(t) = \langle A \mid \text{Im } B \rangle$, die Behauptung für \mathcal{C} folgt analog.

„ \subset “: Für $x \in \mathcal{R}$ gibt es $u \in \mathcal{U}$ und $t > 0$ mit $x = \varphi(t, 0, u)$. Für alle $\tau \in [0, t]$ ist

$$e^{A(T-\tau)} B u(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k B u(\tau) \in \langle A \mid \text{Im } B \rangle,$$

also auch (beachte die Definition des Integrals!)

$$x = \int_0^t e^{A(T-\tau)} B u(\tau) d\tau \in \langle A \mid \text{Im } B \rangle,$$

„ \supset “: Sei $x \in \langle A \mid \text{Im } B \rangle$. Nach Lemma 2.7 existiert $z \in \mathbb{R}^n$ mit

$$x = W_t z = \int_0^t e^{A\tau} B B^\top e^{A^\top \tau} z \, d\tau.$$

Für eine Kontrolle $u \in \mathcal{U}$ mit

$$u(\tau) = B^\top e^{A^\top(t-\tau)} z \text{ für } \tau \in [0, t]$$

ist dann

$$\varphi(t, 0, u) = \int_0^t e^{A\tau} B u(\tau) \, d\tau = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(t-\tau) \, d\tau = \int_0^t e^{A\tau} B B^\top e^{A^\top \tau} \, d\tau \, z = x,$$

also $x \in \mathcal{R}(t)$. ■

Das folgende Korollar charakterisiert vollständige Kontrollierbarkeit direkt mit Hilfe der Matrizen A und B .

Korollar 2.9 (Kalman-Kriterium) Für das System (2.1) gilt $\mathcal{R} = \mathbb{R}^n$ genau dann, wenn der Rang der Erreichbarkeitsmatrix $[B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$ gleich n ist. Das System (und auch das Matrizenpaar (A, B)) heißt dann (vollständig) kontrollierbar.

Die Aussage von Theorem 2.8 kann man auch etwas expliziter so formulieren: Der Erreichbarkeitsunterraum \mathcal{R} ist gegeben durch

$$\mathcal{R} = \{Bu_1 + ABu_2 + \dots + A^{n-1}Bu_n, \ u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^m\}.$$

Man sagt auch, dass das Matrizenpaar (A, B) kontrollierbar ist, wenn Kontrollierbarkeit gilt.

Beispiel 2.10 Die Gleichung des linearisierten Pendels (mit Dämpfung $k \geq 0$) ist

$$\ddot{\varphi}(t) - k\dot{\varphi}(t) - \varphi(t) = u(t)$$

oder mit $x_1 = \varphi$, $x_2 = \dot{\varphi}$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$

Die Erreichbarkeitsmatrix mit $n = 2$

$$[B \ AB] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$$

hat den Rang 2, das System ist also vollständig kontrollierbar.

Bemerkung 2.11 Die vorangegangenen Beweise lassen sich genauso führen, wenn an Stelle von stückweise stetigen Kontrollfunktionen lokal integrierbare Kontrollfunktionen erlaubt sind. Insbesondere bleibt die Charakterisierung von Erreichbarkeitsmengen in Theorem 2.8 gültig.

Jetzt diskutieren wir ein weniger triviales Beispiel, Kontrollierbarkeit eines geostationären Satelliten (aus Trentelmann, Stoorvogel, Hautus [16]). Das Ziel ist, einen Satelliten in einem geostationären Orbit zu halten. Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass der Satellit sich in der Äquatorebene bewegt. Der Ursprung sei das Erdzentrum, die Position des Satelliten ist durch seine Polarkoordinaten (r, θ) gegeben. Wir führen die folgenden Konstanten ein:

M_E := Erdmasse; G := Gravitationskonstante der Erde;
 Ω := Winkelgeschwindigkeit der Erde; M_S := Masse des Satelliten.

Wir nehmen an, dass der Satellit Düsen hat, die Kräfte $F_r(t)$ und $F_\theta(t)$ in Richtung r bzw. θ ausüben. Mit Newtons Gesetz kann man zeigen, dass die Bewegungsgleichungen des Satelliten gegeben sind durch

$$\ddot{r}(t) = r(t)\dot{\theta}(t)^2 - \frac{GM_E}{r(t)^2} + \frac{F_r(t)}{M_S}, \quad \ddot{\theta}(t) = -2\frac{\dot{r}(t)\dot{\theta}(t)}{r(t)} + \frac{F_\theta(t)}{M_S r(t)}.$$

Der geostationäre Orbit ist gegeben durch

$$\theta(t) = \theta_0 + \Omega t, \quad r(t) = R_0, \quad F_r(t) = 0, \quad F_\theta(t) = 0,$$

wobei R_0 noch zu bestimmen ist. Wir überprüfen zunächst, dass dies für geeignetes R_0 eine Lösung der Differentialgleichung ist. In der Tat, durch Einsetzen in die Differentialgleichung erhalten wir

$$0 = R_0\Omega^2 - \frac{GM_E}{R_0^2}, \quad \text{also } R_0 = \sqrt[3]{\frac{GM_E}{\Omega^2}}. \quad (2.9)$$

Mit den physikalischen Konstanten ergibt sich, dass R_0 ungefähr 42.000 km ist. Der geostationäre Orbit ist also ein Kreis in der Äquatorebene, in einer Höhe von ca. 35.620 km (der Erdradius ist ca. 6.380 km). Wie üblich ersetzen wir die Differentialgleichungen zweiter Ordnung durch solche erster Ordnung und setzen hier

$$x_1(t) := r(t) - R_0, \quad x_2(t) := \dot{r}(t), \quad x_3(t) := \theta - (\theta_0 + \Omega t), \quad x_4(t) := \dot{\theta}(t) - \Omega$$

Dann ist also x_3 die Abweichung vom gewünschten Winkel. In diesen neuen Koordinaten sind die Systemgleichungen

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ (x_1(t) + R_0)(x_4(t) + \Omega)^2 - \frac{GM_E}{(x_1(t) + R_0)^2} + \frac{F_r(t)}{M_S} \\ x_4(t) \\ -2\frac{x_2(t)(x_4(t) + \Omega)}{x_1(t) + R_0} + \frac{F_\theta(t)}{M_S(x_1(t) + R_0)} \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Der Kontroll-Input, die Steuerung, ist $u = (F_r, F_\theta)^\top$. Der geostationäre Orbit korrespondiert zur Gleichgewichtslösung gegeben durch

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 0), \quad F_r = 0, \quad F_\theta = 0.$$

Eine kleine Anfangsstörung kann das System auf eine gestörte Bahn bringen, die nach Keplers Gesetz eine Ellipse ist und damit nicht mehr geostationär.

Dies ist kein lineares Kontrollsystem. Wenn wir jedoch in der Nähe des Gleichgewichts $0 \in \mathbb{R}^4$ das System durch seine Linearisierung ersetzen, also die Jacobi-Matrix bezüglich x und bezüglich u , ausgewertet in $x = 0, u = 0$ verwenden, so erhalten wir ein lineares Kontrollsystem.

Genauer ersetzen wir in dem nichtlinearen Kontrollsystem

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

mit Gleichgewicht $x^0 = 0$ zur Steuerung $u^0 \equiv 0$ die rechte Seite durch ihre Linearisierung

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x(t) + \frac{\partial f}{\partial u}(0,0)u(t).$$

Hier approximiert x also die Abweichung von $x^0 = 0$ und u die Abweichung von $u^0 = 0$. Für (2.10) ergibt sich

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\Omega^2 & 0 & 0 & 2R_0\Omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\frac{\Omega}{R_0} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{M_S} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{M_S R_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix};$$

hierbei ergibt sich für die partielle Ableitung

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial x_1 \big|_{x=0, u=0}} &= \frac{\partial}{\partial x_1 \big|_{x=0, u=0}} \left((x_1(t) + R_0)(x_4(t) + \Omega)^2 - \frac{GM_E}{(x_1(t) + R_0)^2} + \frac{F_r(t)}{M_S} \right) \\ &= \Omega^2 + 2\frac{GM_E}{(R_0)^3} = 3\Omega^2, \end{aligned}$$

weil nach (2.9) gilt $\frac{GM_E}{R_0^3} = \Omega^2$. Dies ist ein lineares Kontrollsystem mit

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\Omega^2 & 0 & 0 & 2R_0\Omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\frac{\Omega}{R_0} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{M_S} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{M_S R_0} \end{bmatrix}.$$

Die Erreichbarkeitsmatrix für dieses System ist

$$[B, AB, A^2B, A^3B].$$

Ihr Rang ist $n = 4$, wie man schon an der folgenden Teilmatrix sieht:

$$[B, AB] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{M_S} & 0 \\ \frac{1}{M_S} & 0 & 0 & \frac{2R_0\Omega}{M_S R_0} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{M_S R_0} \\ 0 & \frac{1}{M_S R_0} & -2\frac{\Omega}{R_0 M_S} & 0 \end{bmatrix}.$$

Das linearisierte Kontrollsystem ist also kontrollierbar, wenn Steuerungen über Düsen parallel zum Radius und tangential an den Orbit vorhanden sind.

Es stellt sich die Frage, wie typisch Kontrollierbarkeit im Raum aller Matrizenpaare (A, B) ist. Wir zeigen die folgende Generizitätseigenschaft.

Proposition 2.12 *Die Menge der kontrollierbaren Matrizenpaare (A, B) ist offen und dicht in $\mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times m}$ (identifiziert mit \mathbb{R}^{n^2+nm}).*

Beweis. *Das Komplement M der Menge der kontrollierbaren Paare ist eine algebraische Teilmenge von \mathbb{R}^{n^2+nm} , d.h., es ist die Menge der gemeinsamen Nullstellen von endlich vielen Polynomen. In der Tat ist (A, B) nicht kontrollierbar genau dann, wenn alle möglichen Unterdeterminanten der Größe n der Erreichbarkeitsmatrix verschwinden. Diese lassen sich als Polynome P_1, \dots, P_r*

in $n^2 + nm$ Variablen schreiben. Offenbar ist M eine echte, abgeschlossene Teilmenge. Schließlich hat M keine inneren Punkte, weil ein Polynom, das auf einer offenen Menge verschwindet, schon identisch null ist. ■

Dieses Resultat zeigt, dass man Kontrollierbarkeit erwarten kann, falls alle Einträge von A und B durch Messungen bestimmt sind. Die Relevanz dieses Resultats ist jedoch recht eingeschränkt: gewisse Einträge von A und B können strukturell bestimmt sind (in der Pendelgleichung etwa die 1 und die 0); ferner sind Systeme, die nahe an einem unkontrollierbaren System sind, praktisch unkontrollierbar (vgl. Sontag [15, pp. 95]).

Man kann auch über anderen Körpern als \mathbb{R} Kontrollierbarkeit studieren. So bleibt das obige Resultat auch über \mathbb{C} richtig. Kontrollierbarkeit über endlichen Körpern spielt in der Theorie der Signalübertragung eine Rolle.

Als Folgerung aus der Charakterisierung des Erreichbarkeitsunterraums ergibt sich eine einfache Form für nichtkontrollierbare Systeme: Jedes lineare Kontrollsystem kann nach Koordinatentransformation (in \mathbb{R}^n) in der Form

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= A_1 y_1 + A_2 y_2 + B_1 u \\ \dot{y}_2 &= A_3 y_2 \end{aligned} \quad (2.11)$$

geschrieben werden, wobei (A_1, B_1) kontrollierbar ist: Wähle eine Basis im Erreichbarkeitsunterraum und ergänze sie zu einer Basis von \mathbb{R}^n .

Wir werden jetzt eine alternative Charakterisierung von Kontrollierbarkeit herleiten mit Hilfe der Eigenwerte der Matrix A . Das charakteristische Polynom χ_A ist durch die von A definierte lineare Abbildung bestimmt, ändert sich also nicht bei Koordinatentransformation (wie man auch leicht nachrechnet). Daher gilt, beim Übergang zu (2.11) mit

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}$$

für das charakteristische Polynom

$$\chi_A(z) = \chi_{\tilde{A}}(z) = \det(zI - \tilde{A}) = \det(zI - A_1) \det(zI - A_3).$$

Definition 2.13 *Mit der obigen Notation heißen*

$$\chi_A^c(z) = \det(zI - A_1) \text{ und } \chi_A^u(z) = \det(zI - A_3)$$

der kontrollierbare bzw. der unkontrollierbare Teil (bezüglich B) des charakteristischen Polynoms von A .

Theorem 2.14 (Hautus-Kriterium) *Für das Kontrollsystem (2.1) sind äquivalent:*

- (i) Das Paar (A, B) ist kontrollierbar;
- (ii) $\text{rang}(\lambda I - A | B) = n$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$;
- (iii) $\text{rang}(\lambda I - A | B) = n$ für alle Eigenwerte λ von A .

Beweis. Die Äquivalenz von (ii) und (iii) gilt, weil schon $\lambda I - A$ den Rang n hat, falls λ kein Eigenwert von A ist. Ferner ist bleibt Bedingung (iii) richtig bei Koordinatentransformationen in \mathbb{R}^n .

Zur Äquivalenz von (i) und (iii) beachte, dass $\text{rang}(\lambda I - A | B) < n$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ genau dann gilt, wenn es ein $0 \neq p \in \mathbb{C}^n$ gibt, das senkrecht auf dem Bild

von $(\lambda I - A | B)$ steht. Sei also p^* der Zeilenvektor, dessen Einträge gleich den konjugiert-komplexen Einträgen von p sind. Dann gilt $p^*(\lambda I - A | B) = 0$ oder $p^*A = \lambda p^*$ (d.h. p^* ist Linkseigenvektor von A) und $p^*B = 0$. Dies impliziert $p^*A^k B = \lambda^k p^*B = 0$ für alle $k = 0, 1, \dots$. Dies bedeutet, dass p senkrecht auf dem Bild der Erreichbarkeitsmatrix steht, also die (reelle) Erreichbarkeitsmatrix einen Rang kleiner als n hat und damit das Kalman-Kriterium verletzt ist.

Ist umgekehrt das System nicht kontrollierbar, so können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass A die obige Block-Dreiecksform hat mit $A_3 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$, $n_2 \geq 1$. Betrachte einen Eigenwert λ von A_3 mit Eigenvektor $p \in \mathbb{C}^{n_2}$ in dem entsprechenden Unterraum, also $A_3^\top p = \lambda p$. Wegen der Blockdreiecksform von A gilt daher

$$\begin{bmatrix} A_1^\top & 0 \\ A_2^\top & A_3^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ A_3^\top p \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ p \end{bmatrix}.$$

Daher ist λ auch ein Eigenwert von A^\top mit Eigenvektor $\begin{bmatrix} 0 \\ p \end{bmatrix}$, also $A^\top p = \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ p \end{bmatrix}$ oder $\lambda p^* - p^*A = 0$. Ferner ist

$$[0, p^*]B = [0, p^*] \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Damit gilt $[0, p^*(\lambda I - A | B) = 0$, also $\text{rang}(\lambda I - A | B) < n$. ■

Ein einfaches Beispiel liefert wieder das linearisierte Pendel. Hier ist $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & k \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, also

$$(\lambda I - A | B) = \left[\begin{array}{ccc|c} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda - k & 1 & 1 \end{array} \right].$$

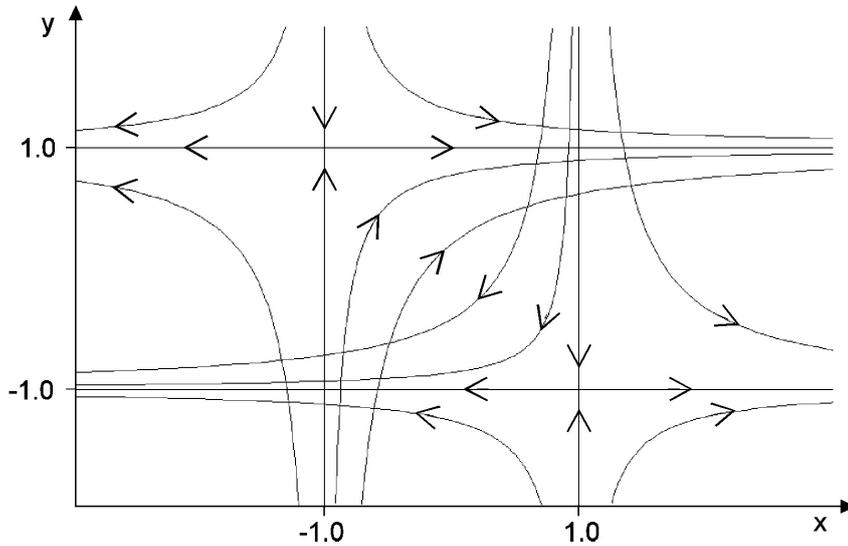
Ist λ kein Eigenwert von A , so hat bereits die Teilmatrix $\lambda I - A$ den Rang 2. Auch für einen Eigenwert λ von A sieht man, dass die Teilmatrix $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \lambda - k & 1 \end{bmatrix}$ den Rang 2 hat.

2.3 Kontrollierbarkeit bei beschränkten Kontrollen

In diesem Abschnitt betrachten wir lineare Systeme mit Kontrollbeschränkungen von folgendem Typ:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu(t) && \text{in } \mathbb{R}^n, \\ u &\in \mathcal{U} = \{u : \mathbb{R} \rightarrow U, \text{ stückweise stetig}\}, \end{aligned} \tag{2.12}$$

wobei $U \subset \mathbb{R}^m$ konvex und kompakt mit $0 \in \text{int } U$ ist und A und B wie in (2.1) sind. Die Bezeichnungen für Erreichbarkeitsmengen etc. aus dem letzten Abschnitt übernehmen wir entsprechend für dieses System, also für das System **mit** Kontrollbeschränkung. Wir nehmen in diesem ganzen Abschnitt an, dass (A, B)

Abbildung 2.1: Phasenporträts für $u = +1$ und $u = -1$ in Beispiel 2.16.

kontrollierbar ist, das heißt, die Kalman-Bedingung $\text{rg}[B, AB, \dots, A^{n-1}B] = n$ gilt. Ist dies nicht erfüllt, so können wir in dem Kontrollierbarkeitsunterraum

$$\langle A \mid \text{Im } B \rangle = \text{Im}[B, AB, \dots, A^{n-1}B]$$

arbeiten. Beispiel 2.10 (mit $k > 0$) überzeugt uns rasch, dass wir hier im allgemeinen keine vollständige Kontrollierbarkeit erwarten können. Stattdessen betrachten wir die folgendermaßen definierten Teilmengen vollständiger (approximativer) Kontrollierbarkeit.

Definition 2.15 Eine Teilmenge D des Zustandsraums \mathbb{R}^n mit nichtleerem Inneren $\text{int}D$ heißt *Kontrollmenge*, falls für alle $x \in D$ gilt $D \subset \text{cl}\mathcal{O}^+(x)$ und D maximal mit dieser Eigenschaft ist.

Die Maximalitätsbedingung bedeutet, dass jede Obermenge $D' \supset D$ mit $D' \subset \text{cl}\mathcal{O}^+(x)$ für alle $x \in D'$ gleich D ist.

Beispiel 2.16 Betrachte das zwei-dimensionale lineare Kontrollsystem

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t), \quad u(t) \in U = [-1, 1].$$

Das Paar (A, B) ist kontrollierbar und die Lösungen sind

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t x_0 \\ e^{-t} y_0 \end{pmatrix} + \int_0^t u(s) \begin{pmatrix} e^{t-s} \\ e^{s-t} \end{pmatrix} ds.$$

Das Phasenporträt für $u \equiv 1$ erhält man aus dem Phasenporträt für $u = 0$, indem man setzt:

$$\tilde{x} := x + 1, \tilde{y} := y - 1.$$

Dann gilt

$$\frac{d}{dt}\tilde{x} = \tilde{x}, \quad \frac{d}{dt}\tilde{y} = \tilde{y};$$

analog für alle anderen Kontrollwerte in $[-1, 1]$. In Figur 2.1 sind die Phasenporträts für $u = 1$ und $u = -1$ skizziert. Man überlegt sich, dass hier eine eindeutige Kontrollmenge D existiert und

$$D = (-1, 1) \times [-1, 1].$$

Wir diskutieren zunächst die folgende grundlegende Eigenschaft von Erreichbarkeitsmengen.

Definition 2.17 Das System (2.12) heißt lokal akzessibel in x , falls für alle $T > 0$ gilt:

$$\text{int}\mathcal{O}_{\leq T}^+(x) \neq \emptyset \text{ und } \text{int}\mathcal{O}_{\leq T}^-(x) \neq \emptyset.$$

Ist dies für alle $x \in \mathbb{R}^n$ erfüllt, so heißt das System lokal akzessibel.

Die folgende Proposition zeigt, dass lokale Akzessibilität schon durch die Matrizen A und B bestimmt ist.

Proposition 2.18 Für das System (2.12) gilt $\text{int}\mathcal{O}_T^+(x) \neq \emptyset$ für ein $T > 0$ und ein $x \in \mathbb{R}^n$ (und dann für alle) genau dann, wenn die Kalman-Bedingung gilt. Äquivalent dazu ist die lokale Akzessibilität.

Beweis. Es gelte die Kalman-Bedingung. Betrachte für $T > 0$ die lineare Abbildung zwischen normierten Vektorräumen,

$$L : u \mapsto \varphi(T, 0, u) : C_{pc}([0, T], \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

wobei wir $C_{pc}([0, T], \mathbb{R}^m)$ mit der Maximum-Norm versehen. Diese Abbildung ist nach Satz 2.8 surjektiv. Daher gibt es $u_i \in C_{pc}([0, T], \mathbb{R}^m)$, $i = 1, \dots, n$, so dass die Einschränkung von L auf den davon erzeugten Untervektorraum

$$V := \{u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$$

ein linearer Isomorphismus zwischen n -dimensionalen normierten Vektorräumen ist. (In der Tat: Für jede Basis (z_1, \dots, z_n) von \mathbb{R}^n sind alle (u_1, \dots, u_n) mit $L(u_i) = z_i$ linear unabhängig). Weil nach Voraussetzung $0 \in \text{int}U$ ist und wir die Maximum-Norm betrachten, können wir die u_i in \mathcal{U} wählen. Weil U konvex ist, ist

$$\left\{ u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0 \text{ und } \sum_{i=1}^n \alpha_i \leq 1 \right\}$$

eine Umgebung der 0 in V . Der Umkehrsatz (Satz über offene Abbildungen) besagt, dass L offene Mengen auf offene Mengen abbildet, und daher enthält $\{Lu \mid u \in \mathcal{U}\}$ eine offene Menge (dies ist hier auch offensichtlich, weil

$$\left\{ \alpha_1 z_1 + \dots + \alpha_n z_n \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0 \text{ und } \sum_{i=1}^n \alpha_i \leq 1 \right\}$$

eine offene Menge ist). Nun ist wegen der Linearität (vgl. (2.7))

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_T^+(x) &= \{y \in \mathbb{R}^n, y = \varphi(T, x, u) \text{ für ein } u \in \mathcal{U}\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^n, y = \varphi(T, x, 0) + \varphi(T, 0, u) \text{ für ein } u \in \mathcal{U}\} \\ &= \varphi(T, x, 0) + \{L(u), u \in \mathcal{U}\}.\end{aligned}$$

Also hat $\mathcal{O}_T^+(x)$ nichtleeres Inneres. Analog argumentiert man für $\mathcal{O}_T^-(x)$. Umgekehrt, gilt lokale Akzessibilität, so hat insbesondere die Erreichbarkeitsmenge vom Ursprung nichtleeres Inneres. Daraus folgt die Kalman-Bedingung (ist sie verletzt, so ist $\mathcal{O}^+(0)$ in einem echten Unterraum enthalten). ■

Bei lokaler Akzessibilität gilt sogar exakte Kontrollierbarkeit im Innern von Kontrollmengen.

Proposition 2.19 *Das System (2.12) sei lokal akzessibel, und D sei eine Kontrollmenge. Dann gilt*

$$\text{int}D \subset \mathcal{O}^+(x) \text{ für alle } x \in D.$$

Beweis. Sei $x \in D$ und $y \in \text{int}D$. Wegen der lokalen Akzessibilität von $y \in \text{int}D$ und der Beschränktheit von U , findet man $t > 0$ so dass $\emptyset \neq \text{int}\mathcal{O}_{\leq t}^-(y) \subset \text{int}D$. In der Tat: ist $z \in \mathcal{O}_{\leq t}^-(y)$, so gilt nach der Variation-der-Parameter-Formel für ein $s \in (0, t]$

$$y = e^{As}z + e^{As} \int_0^s e^{-A\sigma} Bu(\sigma) d\sigma, \text{ also } z = e^{-As}y - \int_0^s e^{-A\sigma} Bu(\sigma) d\sigma.$$

Wegen der Beschränktheit von U ist also für kleine t der Punkt z nahe an y .

Wähle $z \in \text{int}\mathcal{O}_{\leq t}^-(y)$. Wegen $z \in \text{cl}\mathcal{O}^+(x)$ findet man einen Punkt $z_0 \in \mathcal{O}_{\leq t}^-(y) \cap \mathcal{O}^+(x)$. Daher gibt es $S, T > 0$ und Kontrollen $u, v \in \mathcal{U}$ mit $\varphi(S, x, u) = z_0$ und $\varphi(T, z_0, v) = y$. Die Verknüpfung

$$w(t) = \begin{cases} u(t) & \text{für } t \in [0, S] \\ v(t - S) & \text{für } t \in (S, T + S] \end{cases}$$

liefert $\varphi(S + T, x, w) = y$, also $y \in \mathcal{O}^+(x)$. ■

Wir bemerken auch die folgende Eigenschaft.

Proposition 2.20 *Das System (2.12) sei lokal akzessibel, und D sei eine Kontrollmenge. Dann ist $D = \text{cl}\mathcal{O}^+(x) \cap \mathcal{O}^-(x)$ für jedes $x \in \text{int}D$.*

Beweis. Der Durchschnitt $\text{cl}\mathcal{O}^+(x) \cap \mathcal{O}^-(x)$ ist in D enthalten: für jedes $z \in \text{cl}\mathcal{O}^+(x) \cap \mathcal{O}^-(x)$ existiert $u \in \mathcal{U}$ und $T \geq 0$ mit $x = \varphi(T, z, u)$, also ist jeder Punkt von D approximativ von z erreichbar, indem man zunächst von z nach x steuert, und dann ausnutzt, dass man von x aus jeden Punkt von D approximativ erreichen kann. Ferner ist z von x approximativ erreichbar, d.h. $z \in \text{cl}\mathcal{O}^+(x)$. Dann ist $z \in \text{cl}\mathcal{O}^+(y)$ für jedes $y \in D$: steuere von y zunächst nach x und dann approximativ nach z .

Für die umgekehrte Inklusion wähle $x \in \text{int}D$ und betrachte $y \in D$. Dann ist $y \in \text{cl}\mathcal{O}^+(x)$ nach der Definition von Kontrollmengen. Ferner folgt $x \in \mathcal{O}^+(y)$ nach Proposition 2.19, also $y \in \mathcal{O}^-(x)$. ■

Proposition 2.21 Seien D_1 und D_2 Kontrollmengen mit $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$. Dann folgt $D_1 = D_2$.

Beweis. Übungsaufgabe. ■

Der nächste Satz charakterisiert Kontrollmengen für lineare Kontrollsysteme mit beschränkten Kontrollen. Der Vollständigkeit halber sind alle vorangegangenen Annahmen noch einmal aufgeführt.

Theorem 2.22 Für das System (2.12) sei $U \subset \mathbb{R}^m$ konvex und kompakt mit $0 \in \text{int} U$ und (A, B) sei kontrollierbar, das heißt, die Kalman-Bedingung $\text{rg}[B, AB, \dots, A^{n-1}B] = n$ gilt. Dann gibt es genau eine Kontrollmenge D ; sie enthält 0 im Innern und $D = \text{cl}\mathcal{O}^+(0) \cap \mathcal{O}^-(0)$.

Beweis. Aus $0 = \varphi(1, 0, 0)$ und der Kalman-Bedingung folgt wie in Proposition 2.18, dass $0 \in \text{int}\mathcal{O}_1^+(0)$ und $0 \in \text{int}\mathcal{O}_1^-(0)$. Dann gibt es eine Umgebung von 0, die in $\text{int}\mathcal{O}_1^+(0) \cap \text{int}\mathcal{O}_1^-(0)$ enthalten ist. Daraus folgt, dass 0 im Innern einer Kontrollmenge D liegt. Nach Proposition 2.20 ist die Kontrollmenge $D = \text{cl}\mathcal{O}^+(0) \cap \mathcal{O}^-(0)$.

Es bleibt zu zeigen, dass die Kontrollmenge eindeutig ist. Sei also D' eine beliebige Kontrollmenge und $x \in \text{int}D'$. Betrachte eine Umgebung $N \subset \text{int}D'$ von x . Wegen exakter Kontrollierbarkeit im Innern von Kontrollmengen gibt es für alle $y \in N$ Kontrollen $u, v \in \mathcal{U}$ und Zeiten $S, T > 0$ mit

$$\varphi(S, x, u) = y \text{ und } \varphi(T, y, v) = x.$$

Die Linearität impliziert, dass für für alle Punkte in der Umgebung $\alpha N := \{\alpha y, y \in N\}$ von αx gilt, dass

$$\varphi(S, \alpha x, \alpha u) = e^{AS}\alpha x + \int_0^S e^{A(S-\tau)}B\alpha u(\tau)d\tau = \alpha y$$

und ebenso $\varphi(T, \alpha y, \alpha v) = \alpha x$. Dabei sind αu und αv in \mathcal{U} , weil U konvex ist mit $0 \in U$. Daher ist für jedes $\alpha \in (0, 1)$ der Punkt αx im Innern einer Kontrollmenge D^α . Dann müssen nach Proposition 2.22 diese Kontrollmengen D^α alle mit der Kontrollmenge um den Ursprung übereinstimmen: Das ist sicherlich richtig für kleine $\alpha > 0$. Definiere $\alpha_0 := \sup\{\alpha > 0, \alpha x \in \text{int}D\}$. Dann ist $\alpha_0 x$ im Abschluss von D . Weil $\alpha_0 x$ im Innern einer Kontrollmenge liegt, hat diese Kontrollmenge nichtleeren Schnitt mit D , stimmt also mit D überein. Es folgt $\alpha_0 = 1$. ■

Bemerkung 2.23 Das wesentliche Argument im Beweis der Eindeutigkeit ist die Konstruktion einer stetigen Familie von Punkten, die jeweils im Innern einer Kontrollmenge liegen. Daraus folgt, dass diese Kontrollmengen schon übereinstimmen. Ist A asymptotisch stabil (siehe unten), so kann man auch zeigen, dass $D = \text{cl}\mathcal{O}^+(x)$ für alle $x \in D$, insbesondere ist D also abgeschlossen.

2.4 Beobachtbarkeit und Dualität

In diesem Abschnitt kehren wir zu Systemen ohne Kontrollbeschränkungen zurück, fügen jedoch einen Output hinzu. Wir betrachten lineare Kontrollsysteme mit Output der Form

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx, \tag{2.13}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, und $C \in \mathbb{R}^{k \times n}$. Das Problem der Beobachtbarkeit ist, aus dem Verlauf des Output $y(t)$, $t > 0$, auf den Zustand x zu schließen. Präziser definieren wir zunächst:

Definition 2.24 Zwei Zustände $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ des Systems (2.13) heißen ununterscheidbar, falls für alle $u \in \mathcal{U}$ gilt

$$C\varphi(t, x_1, u) = C\varphi(t, x_2, u) \text{ für alle } t \geq 0. \quad (2.14)$$

Das System (2.13) heißt beobachtbar, falls alle $x_1 \neq x_2$ unterscheidbar sind, d.h., aus (2.14) folgt $x_1 = x_2$.

Wegen der Linearität sieht man sofort, dass

$$C\varphi(t, x_1, u) - C\varphi(t, x_2, u) = C\varphi(t, x_1 - x_2, 0),$$

also ist Ununterscheidbarkeit bezüglich irgendeiner Kontrolle äquivalent zu Ununterscheidbarkeit bezüglich der Kontrolle $u = 0$. Insbesondere können wir bei der Analyse der Beobachtbarkeit den Input Bu zunächst weglassen.

Wir nennen einen Zustand $x \in \mathbb{R}^n$ unbeobachtbar, falls $C\varphi(t, x, 0) = 0$ für alle $t \geq 0$, und definieren die Menge der unbeobachtbaren Zustände auf $[0, t]$ als

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(t) &= \{x \in \mathbb{R}^n, C\varphi(s, x, 0) = 0 \text{ für alle } s \in [0, t]\}, \\ \mathcal{N} &= \bigcap_{t>0} \mathcal{N}(t). \end{aligned}$$

Proposition 2.25 Für das System (2.13) und $t > 0$ gilt

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}(t) = \bigcap_{i=1}^n \ker(CA^{i-1}).$$

Beweis. Offenbar ist $x \in \mathbb{R}^n$ genau dann auf $[0, t]$ unbeobachtbar, wenn für alle $s \in [0, t]$

$$0 = C\varphi(s, x, 0) = Ce^{sA}x.$$

Dies ist äquivalent zu

$$CA^k x = 0 \text{ für alle } k = 0, 1, \dots,$$

denn dies erhält man durch sukzessives Differenzieren in $s = 0$; die Umkehrung folgt aus der Definition der Matrixexponentialfunktion. Nach dem Satz von Cayley-Hamilton reicht es, $k = 0, 1, \dots, n - 1$ zu betrachten. ■

In (2.11) haben wir den kontrollierbaren Teil eines Systems identifiziert. Analog werden wir jetzt auch einen unbeobachtbaren Teil identifizieren. Dazu betrachten wir das "Quotientensystem, das durch das folgende Diagramm beschrieben wird:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}^m & \xrightarrow{B} & \mathbb{R}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^n & \xrightarrow{C} & \mathbb{R}^k \\ & \searrow \bar{B} & \downarrow & & \downarrow & \nearrow \bar{C} & \\ & & \mathbb{R}^n/\mathcal{N} & \xrightarrow{\bar{A}} & \mathbb{R}^n/\mathcal{N} & & \end{array}$$

Hierbei bezeichnen die vertikalen Pfeile die kanonische Projektion $Px = x + \mathcal{N}$ und \bar{B} , \bar{A} , und \bar{C} sind die eindeutigen linearen Abbildungen, für die das Diagramm kommutiert, für die also gilt

$$P B = \bar{B}, P A = \bar{A} P, \bar{C} P = C.$$

Die eindeutigen Abbildungen \bar{A} und \bar{C} existieren, weil \mathcal{N} A -invariant ist und $\mathcal{N} \subset \ker C$. Das Quotientensystem

$$\dot{z} = \bar{A}z + \bar{B}u, \quad y = \bar{C}z,$$

haben wir erhalten, indem wir ununterscheidbare Zustände miteinander identifiziert haben. Wir können also erwarten, dass das Quotientensystem beobachtbar ist.

Proposition 2.26 *Das Quotientensystem zu (B, A, C) faktorisiert nach dem unbeobachtbaren Teilraum \mathcal{N} ist beobachtbar.*

Beweis. Ist $\bar{x} = Px \in \mathbb{R}^n/\mathcal{N}$ unbeobachtbar für $(\bar{B}, \bar{A}, \bar{C})$ so gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{C}\bar{A}^k\bar{x} = \bar{C}\bar{A}^{k-1}\bar{A}\bar{x} = \bar{C}\bar{A}^{k-1}\bar{A}Px \\ &= \bar{C}\bar{A}^{k-1}PAx = \dots \\ &= \bar{C}PA^kx = CA^kx, \end{aligned}$$

was äquivalent zu $x \in \mathcal{N}$ ist. Also ist $\bar{x} = 0$, was zu zeigen war. ■

Für Matrix-Darstellungen der linearen Abbildungen setze eine Basis b_1, \dots, b_l von \mathcal{N} zu einer Basis b_1, \dots, b_n von \mathbb{R}^n fort. Bezüglich dieser Basis hat das System (B, A, C) dann die Darstellung

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} u(t), \quad y = \begin{pmatrix} 0 & C_2 \end{pmatrix} x,$$

weil \mathcal{N} A -invariant ist mit $\mathcal{N} \subset \ker C$. Ferner ist \mathbb{R}^n/\mathcal{N} isomorph zu jedem komplementären Unterraum zu \mathcal{N} in \mathbb{R}^n . Also ist (B_2, A_3, C_2) eine Matrix-Darstellung von $(\bar{B}, \bar{A}, \bar{C})$.

Die Beweise für die Charakterisierung von Kontrollierbarkeit und Beobachtbarkeit sind sehr ähnlich. Dahinter steht eine Dualitätsbeziehung zwischen Beobachtbarkeit und Kontrollierbarkeit, die wir jetzt präzisieren.

Definition 2.27 *Das zu (2.13) duale System ist*

$$\dot{x} = A^\top x + C^\top u, \quad y = B^\top x. \quad (2.15)$$

Wir erhalten also das duale System, indem wir Input und Output vertauschen, und die Matrizen transponieren. Offenbar ist das Originalsystem dual zu dem dualen System.

Theorem 2.28 *Für ein System (B, A, C) und das duale System (C^\top, A^\top, B^\top) seien*

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \langle A | \text{Im } B \rangle, \quad \mathcal{N} = \bigcap_{i=0}^{n-1} \ker(CA^i), \\ \mathcal{R}^\top &= \langle A^\top | \text{Im } C^\top \rangle, \quad \mathcal{N}^\top = \bigcap_{i=0}^{n-1} \ker(B^\top (A^\top)^i) \end{aligned}$$

die zugehörigen Erreichbarkeits- und Unbeobachtbarkeitsunterräume. Dann gilt mit den orthogonalen Komplementen

$$\mathcal{R}^\top = \mathcal{N}^\perp \quad \text{und} \quad \mathcal{N}^\top = \mathcal{R}^\perp.$$

Beweis. Für die lineare Abbildung

$$M = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{nk}$$

ist die duale Abbildung gegeben durch

$$M^\top = \left(C^\top \quad A^\top C^\top \quad . \quad . \quad . \quad (A^\top)^{n-1} C^\top \right).$$

Daher kann M^\top mit der Erreichbarkeitsmatrix des dualen Systems identifiziert werden. Mit der Dualität aus der linearen Algebra folgt, dass (orthogonale Komplemente werden bezüglich des euklidischen Skalarprodukts genommen)

$$\mathcal{R}^\top = \text{Im } M^\top = (\ker M)^\perp = \mathcal{N}^\perp.$$

Analog folgt die zweite Beziehung. ■

Wir erhalten sofort das folgende Korollar.

Korollar 2.29 (i) Ein System ist genau dann kontrollierbar, wenn das duale System beobachtbar ist.

(ii) Ein System (B, A, C) ist genau dann beobachtbar, wenn die Beobachtbarkeitsmatrix

$$(C^\top, A^\top C^\top, \dots, (A^\top)^{n-1} C^\top)$$

vollen Rang hat.

Ferner ist Beobachtbarkeit eine generische Eigenschaft.

Zum Schluß dieses Abschnitts werden wir eine Zerlegung des Zustandsraums in Hinblick auf Beobachtbarkeits- und Kontrollierbarkeitseigenschaften konstruieren. Definiere dazu die folgenden Unterräume von \mathbb{R}^n :

Der Unterraum der kontrollierbaren und unbeobachtbaren Zustände ist

$$X_1 := \mathcal{R} \cap \mathcal{N} = \langle A | \text{Im } B \rangle \cap \bigcap_{i=0}^{n-1} \ker(CA^i);$$

ein komplementärer Unterraum X_2 von X_1 in \mathcal{R} , d.h.,

$$\mathcal{R} = X_1 \oplus X_2;$$

ein komplementärer Unterraum X_3 von X_1 in \mathcal{N} , d.h.,

$$\mathcal{N} = X_1 \oplus X_3;$$

ein komplementärer Unterraum X_4 von $X_1 \oplus X_2 \oplus X_3 = \mathcal{R} + \mathcal{N}$ in \mathbb{R}^n , d.h.,

$$\mathbb{R}^n = (\mathcal{R} + \mathcal{N}) \oplus X_4 = X_1 \oplus X_2 \oplus X_3 \oplus X_4.$$

Wir bemerken, dass X_4 zum Beispiel als der A^\top -invariante Unterraum der unbeobachtbaren und kontrollierbaren Zustände des dualen Systems gewählt werden kann:

$$X_4 = \mathcal{R}^\top \cap \mathcal{N}^\top = \mathcal{N}^\perp \cap \mathcal{R}^\perp = (\mathcal{N} + \mathcal{R})^\perp.$$

Es seien $P_i : \mathbb{R}^n \rightarrow X_i$ die kanonischen Projektionen zu dieser Zerlegung (erinnere, dass sich jedes $x \in \mathbb{R}^n$ eindeutig in der Form $x = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ mit $x_i \in X_i$ schreiben lässt), für die gilt

$$P_i^2 = P_i \text{ und } P_i|_{X_i} = \text{Id}.$$

Theorem 2.30 (Kalman-Dekomposition) Für das System (B, A, C) seien X_i und P_i für $i = 1, \dots, 4$, wie oben definiert. Dann hat das System bezüglich dieser Dekomposition die folgende Darstellung:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & C_2 & 0 & C_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

mit $x_i = P_i x$, $A_{ij} = P_i A|_{X_j}$, $B_i = P_i B$, $C_j = C|_{X_j}$, für $i, j = 1, \dots, 4$. Dabei ist das Untersystem

$$\dot{x}_2 = A_{22}x_2 + B_2u, \quad y_2 = C_2x_2 \quad (2.16)$$

kontrollierbar und beobachtbar, und es gilt

$$Ce^{At}B = C_2e^{A_{22}t}B_2 \text{ für } t \geq 0.$$

Beweis. Die linearen Abbildungen A_{31} , A_{32} , A_{41} , A_{42} verschwinden wegen der A -Invarianz von $X_1 \oplus X_2 = R$. Ferner verschwinden A_{21} , A_{23} , A_{41} , A_{43} wegen der A -Invarianz von $X_1 \oplus X_3 = N$. Außerdem ist $\text{Im } B \subset X_1 \oplus X_2$, so dass B_3 und B_4 verschwinden; ebenso verschwinden C_1 und C_3 wegen $X_1 \oplus X_3 \subset \ker C$. Es bleibt das Untersystem (2.16) zu analysieren. Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$A^k = \begin{pmatrix} A_{11}^k & * & * & * \\ 0 & A_{22}^k & 0 & * \\ 0 & 0 & A_{33}^k & * \\ 0 & 0 & 0 & A_{44}^k \end{pmatrix}$$

und daher

$$A^k B = \begin{pmatrix} * \\ A_{22}^k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } CA^k = \begin{pmatrix} 0 & C_2 A_{22}^k & * & * \end{pmatrix},$$

also

$$P_2 A^k B = A_{22}^k B_2, \quad P_4 A^k B = 0, \quad CA^k|_{X_2} = C_2 A_{22}^k.$$

Kontrollierbarkeit von (B_2, A_{22}, C_2) folgt jetzt aus

$$\begin{aligned} \langle A_{22} | \text{Im } B_2 \rangle &= \sum_{k=0}^{\infty} A_{22}^k \text{Im } B_2 = \sum_{k=0}^{\infty} P_2 A^k \text{Im } B \\ &= P_2 \sum_{k=0}^{\infty} A^k \text{Im } B = P_2 \langle A | \text{Im } B \rangle = X_2. \end{aligned}$$

Beobachtbarkeit folgt aus

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} \ker(C_2 A_{22}^k) = \bigcap_{k=0}^{\infty} \ker(CA^k) \cap X_2 = 0$$

nach Definition von X_2 . Schließlich folgt aus $C = C_2 P_2 + C_4 P_4$ für alle $k \geq 0$

$$CA^k B = C_2 P_2 A^k B + C_4 P_4 A^k B = C_2 A_{22}^k B_2$$

und damit $C_2 e^{A_{22}t} B_2 = C e^{At} B$, wie behauptet. ■

Eine einfache Folgerung aus diesem Resultat ist, dass das Input-Output-Verhalten eines beliebigen Systems (B, A, C) schon durch das Verhalten eines beobachtbaren und kontrollierbaren Teilsystems beschrieben werden kann: Ist das System zur Zeit $t = 0$ in $x = 0$, so gilt für beliebige Kontrollfunktionen $u \in \mathcal{U}$

$$C\varphi(t, 0, u) = \int_0^t C e^{A(t-s)} B u(s) ds = \int_0^t C_2 e^{A_{22}(t-s)} B_2 u(s) ds.$$

Man sagt auch, dass es eine beobachtbare und kontrollierbare Realisierung gibt.

Kapitel 3

Stabilität autonomer Differentialgleichungen

In diesem Kapitel werden wir - in aller Kürze - Stabilitätseigenschaften linearer und nichtlinearer autonomer Differentialgleichungen diskutieren. Ausführlichere Informationen geben zum Beispiel Aulbach [2], Amann [1], Walter [17] und Grüne und Junge [5].

3.1 Stabilität und Eigenwerte

Wir beginnen mit der Definition von Stabilität von Gleichgewichten für allgemeine nichtlineare autonome Differentialgleichungen.

Betrachte

$$\dot{x} = f(x) \tag{3.1}$$

mit einer Lipschitz-stetigen Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. Es sei $x^* \in \mathbb{R}^n$ ein Gleichgewicht, also

$$f(x^*) = 0.$$

Ferner sei $\varphi(t, x_0)$, $t \in I$, $x_0 \in D$, die zugehörige Lösung mit Anfangsbedingung $\varphi(0, x_0) = x_0$. Hierbei ist I ein offenes Intervall mit $x_0 \in I$.

Erinnerung: Eine Umgebung U eines Punktes $x \in \mathbb{R}^n$ ist eine Teilmenge des \mathbb{R}^n , die eine ε -Kugel um x enthält, also x im Innern enthält. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt Lipschitz-stetig, wenn für all $x_0 \in D$ eine Umgebung U und $L > 0$ existieren mit $\|f(x) - f(y)\| \leq L \|x - y\|$ für all $x, y \in U$. Ferner gilt auf dem Existenzintervall der Lösungen die Flusseigenschaft $\varphi(t+s, x_0) = \varphi(s, \varphi(t, x_0))$.

Definition 3.1 (i) Ein Gleichgewicht x^* heißt stabil, falls für jede Umgebung U von x^* eine Umgebung V von x^* existiert, so dass für alle $x \in V$ die zugehörige Lösung $\varphi(t, x)$ für alle $t \geq 0$ existiert und $\varphi(t, x) \in U$ gilt. Andernfalls heißt das Gleichgewicht instabil.

(ii) Ein Gleichgewicht x^* heißt attraktiv, falls es eine Umgebung W besitzt, so dass für alle $x \in W$ gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, x) = x^*.$$

(iii) Ein Gleichgewicht x^* heißt asymptotisch stabil, falls es stabil und attraktiv ist.

Es reicht, an Stelle allgemeiner Umgebungen Kugeln um x^* zu betrachten: Stabilität ist daher gleichwertig mit der Eigenschaft, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle x mit $\|x - x^*\| < \delta$ die Lösung existiert und $\|\varphi(t, x) - x^*\| < \varepsilon$ für alle $t \geq 0$ erfüllt. Denn eine beliebige Umgebung U von x^* enthält eine ε -Kugel $\mathbf{B}(x^*, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, also ist die δ -Kugel $V = \mathbf{B}(x^*, \delta)$ die gesuchte Umgebung. Analog bedeutet Attraktivität, dass $\varepsilon_0 > 0$ existiert, so dass $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, x) = x^*$ für alle x mit $\|x - x^*\| < \varepsilon_0$ gilt.

Das folgende Beispiel (aus Hahn [6]) zeigt, dass Attraktivität nicht die Stabilität impliziert. Es gibt (nichtlineare) autonome Differentialgleichungen mit Ruhelagen, die attraktiv, aber nicht stabil sind.

Beispiel 3.2 Betrachte das in Polarkoordinaten gegebene ebene System

$$\dot{r} = r(1 - r), \quad \dot{\phi} = \sin^2 \frac{\phi}{2}.$$

Für die Lösungen mit Anfangswert (r_0, ϕ_0) erhält man

$$(r(t), \phi(t)) = \left(\frac{r_0}{r_0 + (1 - r_0)e^{-t}}, 2 \arctan \left(\frac{2 \sin \phi_0}{2 \cos \phi_0 - t \sin \phi_0 + 2} \right) \right).$$

Die Ruhelage $(1, 0)$ ist attraktiv, aber instabil.

Die Klassifikation linearer autonomer Differentialgleichungen $\dot{x} = Ax$ in der Ebene liefert uns sofort eine Reihe von Beispielen. Hier ist der Ursprung immer Gleichgewicht, und wir betrachten daher die Stabilität von $x^* = 0$.

Beispiel 3.3 Betrachte $\dot{x} = Ax$, $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Ist

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma \\ -\sigma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

so hat diese Differentialgleichung ein Zentrum, und der Ursprung ist stabil, aber nicht asymptotisch stabil. Man beachte, dass auch unter einer Koordinatentransformation diese Eigenschaften erhalten bleiben.

Hat A zwei Eigenwerte mit negativem Realteil, so ist der Ursprung asymptotisch stabil. Ist $A = 0$, so ist der Ursprung (und jeder andere Punkt der Ebene) stabiles, aber nicht asymptotisch stabiles Gleichgewicht.

Ist $\lambda = 0$ Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 2 und geometrischer Vielfachheit 1 (also nicht halbeinfach) und A in Jordan-Normalform, also

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

so ist der Ursprung instabil.

Die Inspektion dieser Beispiele in der Ebene \mathbb{R}^2 zeigt, dass das Vorzeichen des Realteils der Eigenwerte eine entscheidende Rolle spielt. Wir werden den folgenden allgemeinen Satz beweisen.

Theorem 3.4 Betrachte für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$.

(i) Der Ursprung $0 \in \mathbb{R}^n$ ist genau dann stabil, wenn alle Eigenwerte von A nichtpositiven Realteil haben und diejenigen mit Realteil 0 halbeinfach sind.

(ii) Der Ursprung $0 \in \mathbb{R}^n$ ist genau dann asymptotisch stabil, wenn alle Eigenwerte von A negativen Realteil besitzen.

Beweis. Die Stabilitätseigenschaften sind unabhängig von der Koordinatendarstellung, weil für jede invertierbare Matrix T gilt $\|y\| = \|Tx\| \leq \|T\| \|x\|$ und $\|x\| \leq \|T^{-1}\| \|y\|$. Wir können also annehmen, dass A in reeller Jordan-Normalform ist. Weil sich die Blockstruktur auf die Lösung überträgt, reicht es dann, die Jordanblöcke J zu einem Eigenwert λ einzeln zu betrachten:

$$\dot{y} = Jy.$$

Sei zunächst $\lambda \in \mathbb{R}$ und x ein Startwert in dem entsprechenden Unterraum. Dann gilt

$$e^{Jt}x = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdot & \frac{t^{d-1}}{(d-1)!} \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & t & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_d \end{bmatrix} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} x_1 + tx_2 + \dots + \frac{t^{d-1}}{(d-1)!}x_d \\ x_2 + tx_3 + \dots + \frac{t^{d-2}}{(d-2)!}x_d \\ \cdot \\ \cdot \\ x_d \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Aus der Analysis I ist bekannt, dass für jedes Polynom $p(t)$ und $\alpha < 0$

$$e^{\alpha t}p(t) \rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow \infty.$$

Insbesondere existiert das Maximum von $\{e^{\alpha t}|p(t)|, t \geq 0\}$. Betrachte die Maximumnorm in \mathbb{R}^d , $\|(y_i)\| := \max_i |y_i|$ und die zugehörige Matrizen-Norm (die Spaltensummen-Norm)

$$\|A\| = \max_i \sum_{k=1}^d |a_{ik}|.$$

Sei jetzt $\lambda < -\kappa$ für ein $\kappa > 0$. Dann folgt wegen $\lambda + \kappa < 0$, dass

$$e^{\kappa t} \|e^{Jt}\| = e^{\kappa t} e^{\lambda t} \max_i \sum_{k=1}^d \frac{t^i}{i!} \rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow \infty$$

und

$$e^{\kappa t} \|e^{Jt}\| = e^{(\kappa+\lambda)t} \max_i \sum_{k=1}^d \frac{t^i}{i!} \leq K \text{ für } t \geq 0$$

mit einer Konstanten $K > 0$ und daher

$$\|e^{Jt}x_0\| \leq \|e^{Jt}\| \|x_0\| \leq K e^{-\kappa t} \|x_0\| \text{ für alle } t \geq 0. \quad (3.3)$$

Aus dieser Formel liest man ab, dass Stabilität und Attraktivität gelten, also asymptotische Stabilität.

Solch eine Abschätzung gilt für jeden reellen Eigenwert kleiner als 0. Analog (mit etwas mehr Schreibearbeit) sieht man, dass dies auch für komplex-konjugierte Paare von Eigenwerten mit negativem Realteil gilt. Daher gilt für

alle Matrizen A in reeller Jordan-Normalform, für die das Maximum der Realteile der Eigenwerte kleiner als $-\kappa < 0$ ist, dass für eine Konstante $K > 0$

$$\|e^{At}x_0\| \leq K e^{-\kappa t} \|x_0\| \text{ für alle } t \geq 0. \quad (3.4)$$

Aus dieser Formel liest man unmittelbar die Stabilität und asymptotische Stabilität ab. Damit haben wir gezeigt, dass asymptotische Stabilität und insbesondere Stabilität folgt, falls das Maximum der Realteile der Eigenwerte negativ ist. Offenbar impliziert die Existenz eines Eigenwertes mit positivem Realteil, dass Instabilität gilt.

Es bleibt nur noch das Stabilitätsverhalten für Eigenwerte mit Realteil 0 zu diskutieren. Sei jetzt $\lambda = 0$ ein Eigenwert mit zugehörigem Jordanblock J gegeben durch (3.2) mit $\lambda = 0$. Wenn die Dimension des Jordanblocks gleich 1 ist, so folgt

$$\|e^{Jt}x_0\| = e^{0t} \|x_0\| = \|x_0\| \text{ für alle } t \geq 0,$$

und die Stabilität ist unmittelbar ablesbar. Attraktivität gilt offenbar nicht. Analoges gilt für komplex-konjugierte Eigenwertpaare $\pm\sigma i$, $\sigma \in \mathbb{R}$. Es ist also nur noch zu zeigen, dass die Existenz eines Jordanblocks mit Dimension > 1 die Instabilität impliziert. Betrachte wieder zunächst $\lambda = 0$, also

$$e^{Jt}x = \begin{bmatrix} x_1 + tx_2 + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^{d-1}}{(d-1)!}x_d \\ x_2 + tx_3 + \dots + \frac{t^{d-2}}{(d-2)!}x_d \\ \vdots \\ x_d \end{bmatrix}.$$

Für jeden Anfangswert $x_1 = 0 = x_3 = \dots = x_d$, $x_2 = \delta$ mit $\delta > 0$ erhält man als Lösung $\delta(t, 1, 0, \dots, 0)^\top$, also eine unbeschränkte Lösung und Instabilität folgt. Analog argumentiert man wieder für komplex-konjugierte Eigenwertpaare. ■

Die Eigenwerte und die zugehörige Struktur der Jordanblöcke legen also die Stabilitätseigenschaften einer autonomen, linearen Differentialgleichung fest.

Bemerkung 3.5 Matrizen, für die alle Eigenwerte negativen Realteil haben, nennt man auch Hurwitz-Matrizen.

Bemerkung 3.6 Wegen der Beziehung (3.4) gilt für autonome lineare Differentialgleichungen, dass die asymptotische Stabilität die exponentielle Stabilität impliziert: für alle asymptotisch stabilen Matrizen A gibt es Konstanten $K > 0$ und $\kappa > 0$ (hierbei müssen die Realteile aller Eigenwerte von A kleiner als $-\kappa$ sein), so dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|e^{At}x\| \leq K e^{-\kappa t} \|x\| \text{ für alle } t \geq 0.$$

Bemerkung 3.7 Der Beweis von Satz 3.4 zeigt auch die folgende stärkere Aussage: Haben alle Eigenwerte von A negativen Realteil, so folgt neben der Stabilität, dass für alle Anfangswerte $x_0 \in \mathbb{R}^n$ die Lösung $\varphi(t, x_0)$ gegen 0 konvergiert. Diese Eigenschaft heißt globale asymptotische Stabilität (im Unterschied dazu nennt man die Eigenschaft in Definition 3.1 auch lokale asymptotische Stabilität).

Für autonome lineare Differentialgleichungen haben wir insbesondere gezeigt: Für alle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ konvergiert die zugehörige Lösung gegen 0 für $t \rightarrow \infty$, wenn alle Eigenwerte von A negativen Realteil haben. Das folgende Beispiel zeigt, dass dies für *nicht-autonome* lineare Differentialgleichungen

$$\dot{x} = A(t)x$$

mit einer stetigen Matrixfunktion $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ falsch ist. Hier haben für alle $t \in \mathbb{R}$ die Matrizen $A(t)$ nur Eigenwerte mit negativem Realteil, aber es gibt unbeschränkte Lösungen.

Beispiel 3.8 *Betrachte die folgende nichtautonome lineare Differentialgleichung in der Ebene \mathbb{R}^2 :*

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = A(t) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + \frac{3}{2} \cos^2 t & 1 - \frac{3}{2} \cos t \sin t \\ -1 - \frac{3}{2} \cos t \sin t & -1 + \frac{3}{2} \sin^2 t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Die Eigenwerte von $A(t)$ sind für jedes $t \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\lambda_{1,2} = (-1 \pm i\sqrt{7})/4,$$

denn

$$\begin{aligned} & \det[\lambda I - A(t)] \\ &= \det \begin{bmatrix} \lambda + 1 - \frac{3}{2} \cos^2 t & -1 + \frac{3}{2} \cos t \sin t \\ 1 + \frac{3}{2} \cos t \sin t & \lambda + 1 - \frac{3}{2} \sin^2 t \end{bmatrix} \\ &= \left(\lambda + 1 - \frac{3}{2} \cos^2 t \right) \left(\lambda + 1 - \frac{3}{2} \sin^2 t \right) - \left(-1 + \frac{9}{4} \cos^2 t \sin^2 t \right) \\ &= \lambda^2 + \lambda \left(1 - \frac{3}{2} \cos^2 t + 1 - \frac{3}{2} \sin^2 t \right) + \left(1 - \frac{3}{2} \cos^2 t \right) \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 t \right) \\ &\quad + 1 - \frac{9}{4} \cos^2 t \sin^2 t \\ &= \lambda^2 + \lambda \left(2 - \frac{3}{2} [\cos^2 t + \sin^2 t] \right) + \begin{pmatrix} 1 - \frac{3}{2} [\sin^2 t + \cos^2 t] \\ + \frac{9}{4} \cos^2 t \sin^2 t \end{pmatrix} \\ &= \lambda^2 + \frac{9}{4} \cos^2 t \sin^2 t \\ &= \lambda^2 + \frac{1}{2} \lambda + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Also

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} - \frac{8}{16}} = (-1 \pm i\sqrt{7})/4.$$

Andererseits ist die Lösung bei Anfangsbedingung $x(0) = -\varepsilon$, $y(0) = 0$ gegeben durch

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \varepsilon \begin{bmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{bmatrix} e^{t/2}, \quad (3.5)$$

denn man rechnet nach

$$\frac{1}{\varepsilon} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} e^{t/2} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{bmatrix} e^{t/2} = \begin{bmatrix} \sin t - \frac{1}{2} \cos t \\ \cos t + \frac{1}{2} \sin t \end{bmatrix} e^{t/2}$$

und

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} -1 + \frac{3}{2} \cos^2 t & 1 - \frac{3}{2} \cos t \sin t \\ -1 - \frac{3}{2} \cos t \sin t & -1 + \frac{3}{2} \sin^2 t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{bmatrix} e^{t/2} \\ &= \begin{bmatrix} \cos t - \frac{3}{2} \cos t \cos^2 t + \sin t - \frac{3}{2} \cos t \sin^2 t \\ \cos t + \frac{3}{2} \cos^2 t \sin t - \sin t + \frac{3}{2} \sin^2 t \sin t \end{bmatrix} e^{t/2} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \cos t + \sin t \\ \cos t + \frac{1}{2} \sin t \end{bmatrix} e^{t/2}. \end{aligned}$$

Die Lösung (3.5) wird offenbar unbeschränkt für $t \rightarrow \infty$.

Für Stabilitätseigenschaften nichtautonomer linearer Differentialgleichungen kann man also im Allgemeinen nicht mit den Eigenwerten der Matrizen für festes t arbeiten. Dieses Problem war schon Lyapunov Anfang des 20. Jahrhunderts bekannt und führte ihn zur Definition der heute Lyapunov-Exponenten genannten Größen, die in den letzten Jahrzehnten intensiv untersucht worden sind und zu vielen neuen Entwicklungen in der Theorie dynamischer Systeme geführt haben.

3.2 Lyapunov-Funktionen

Ist die Dimension der Matrix A größer als drei, wird die Berechnung der Eigenwerte per Hand ausgesprochen unangenehm. Für höherdimensionale Systeme wird daher meist ein anderer Weg beschritten, der auf A.M. Lyapunov (1892) zurückgeht und vor allem auch für nichtlineare Systeme gangbar ist.

Wir betrachten wieder ein Gleichgewicht x^* für das System (3.1). Wir können annehmen, dass $x^* = 0$ gilt. Denn für die Differentialgleichung

$$\dot{y} = f(y + x^*).$$

ist $y^* = 0$ offenbar ein Gleichgewicht, und es ist nicht schwer zu sehen, dass die Stabilitätseigenschaften von y^* mit denen von x^* übereinstimmen.

Wir müssen die Eigenschaften der Funktion V genauer spezifizieren.

Definition 3.9 Sei $V : U_0 \rightarrow [0, \infty)$ eine C^1 -Funktion, die auf einer Umgebung $U_0 \subset D$ von $0 \in \mathbb{R}^n$ definiert ist. Sie heißt positiv definit, falls

$$V(0) = 0 \text{ und } V(x) > 0 \text{ für } x \neq 0.$$

Zum Beispiel ist $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ positiv-definit auf \mathbb{R}^2 ; die Funktion

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - x_2^3$$

ist positiv definit auf einem Streifen um die x_1 -Achse.

Wir wollen garantieren, dass die Funktion V entlang von Lösungen der Differentialgleichung abnimmt, ohne explizit diese Lösungen zu verwenden. Die folgende Definition ist hilfreich:

$$\dot{V}(x) := \frac{\partial V(x)}{\partial x} \cdot f(x), \quad x \in U_0.$$

Man beachte, dass $\dot{V}(x)$ keine Funktion von t ist, insbesondere muss man keine Lösung der Differentialgleichung kennen, um $\dot{V}(x)$ zu berechnen.

Definition 3.10 Eine positiv-definite C^1 -Funktion $V : U_0 \rightarrow [0, \infty)$ heißt Lyapunov-Funktion, falls

$$\dot{V}(x) \leq 0 \text{ für alle } x \in U_0.$$

Sie heißt strikte Lyapunov-Funktion, falls

$$\dot{V}(x) < 0 \text{ für alle } x \in U_0, x \neq 0.$$

Es gilt die folgende hinreichende Bedingung für Stabilität.

Theorem 3.11 Betrachte das Gleichgewicht $0 \in \mathbb{R}^n$ für die Differentialgleichung (3.1).

- (i) Existiert eine Lyapunov-Funktion V , so ist 0 stabil.
- (ii) Existiert eine strikte Lyapunov-Funktion, so ist 0 asymptotisch stabil.

Beweis. (i) Sei $V : U_0 \rightarrow [0, \infty)$ eine positiv-definite C^1 -Funktion mit $\dot{V}(x) \leq 0$ für alle $x \in U_0$. Betrachte $\varepsilon > 0$ mit $\mathbf{B}(0; 2\varepsilon) \subset U_0$. Definiere

$$m := \min_{|x|=\varepsilon} V(x) > 0.$$

Sei δ mit $0 < \delta < \varepsilon$ so, dass $V(x) < m$ für $\|x\| \leq \delta$. Dies existiert, weil V stetig ist mit $V(0) = 0$. Wähle einen Anfangswert x_0 mit $\|x_0\| < \delta$. Dann gilt, solange die Trajektorie in U_0 bleibt, für $t \geq 0$ nach der Kettenregel

$$\frac{d}{dt} V(\varphi(t, x_0)) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} \Big|_{x=\varphi(t, x_0)} \cdot f(\varphi(t, x_0)) = \dot{V}(\varphi(t, x_0)) \leq 0.$$

Durch Integration folgt aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$V(\varphi(t, x_0)) - V(x_0) \leq 0,$$

also

$$V(\varphi(t, x_0)) \leq V(x_0) < m. \quad (3.7)$$

Es folgt, dass $\|\varphi(t, x_0)\| < \varepsilon$ für alle $t \geq 0$ aus dem maximalen Existenzintervall. Dann existiert die Lösung auf $[0, \infty)$. Die Abschätzung gilt, weil es andernfalls nach dem Zwischenwertsatz eine Zeit $s \in (0, t)$ gibt mit

$$\|\varphi(s; x_0)\| = \varepsilon.$$

Wählt man s als die minimale Zeit mit dieser Eigenschaft, so ist $\varphi(\tau; x_0) \in U_0$ für alle $\tau \in [0, s]$ und damit wie oben gezeigt $V(\varphi(t, x_0)) \leq V(x_0) < m$. Nach Definition von m ist aber $V(\varphi(s; x_0)) \geq m$.

(ii) Die Stabilität folgt aus (i). Es ist also nur die Attraktivität zu zeigen. Wir verwenden dazu die folgenden Lemmas. ■

Lemma 3.12 (Gronwall) Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $t_0 \in I$ und $u : I \rightarrow [0, \infty)$ sei eine stetige Funktion, die für Konstanten $\alpha \geq 0$ und $\beta > 0$

$$u(t) \leq \alpha + \beta \int_{t_0}^t u(s) ds \text{ für alle } t \in I \text{ mit } t \geq t_0, \quad (3.8)$$

erfüllt. Dann gilt für alle $t \in I$ mit $t \geq t_0$

$$u(t) \leq \alpha e^{\beta(t-t_0)}. \quad (3.9)$$

Beweis. Wir definieren die Hilfsfunktion

$$v(t) := \int_{t_0}^t u(s) ds, \quad t \in I.$$

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung erhält man aus (3.8)

$$\dot{v}(t) = u(t) \leq \alpha + \beta v(t).$$

Definiere nun die weitere Hilfsfunktion

$$w(t) := v(t)e^{-\beta t}, \quad t \in I.$$

Durch Differenzieren ergibt dies mit der Kettenregel

$$\dot{w}(t) = \left(\frac{d}{dt} v(t) \right) e^{-\beta t} + v(t) \left(\frac{d}{dt} e^{-\beta t} \right) \leq (\alpha + \beta v(t)) e^{-\beta t} - \beta v(t) e^{-\beta t} = \alpha e^{-\beta t}.$$

Integration von t_0 bis t liefert wegen $w(t_0) = 0$

$$w(t) = w(t) - w(t_0) \leq \frac{\alpha}{\beta} (e^{-\beta t_0} - e^{-\beta t}).$$

Damit ergibt sich

$$v(t) \leq \frac{\alpha}{\beta} e^{\beta(t-t_0)} - \frac{\alpha}{\beta}.$$

Für u erhält man daraus und aus (3.8)

$$u(t) \leq \alpha + \beta v(t) \leq \alpha + \alpha e^{\beta(t-t_0)} - \alpha = \alpha e^{\beta(t-t_0)}.$$

■

Lemma 3.13 Betrachte für (3.1) eine Folge $x_n \rightarrow x$ in D . Existieren für alle n die zugehörigen Lösungen auf $[0, T]$, $T > 0$, so gilt für T klein genug

$$\varphi(t, x_n) \rightarrow \varphi(t, x) \quad \text{für alle } t \in [0, T].$$

Beweis. Wähle $T > 0$ so klein, dass $L > 0$ eine Lipschitz-Konstante für alle $\varphi(t, x_n)$ für alle t und n ist. Dann folgt die Behauptung mit der Gronwall-Ungleichung aus

$$\begin{aligned} \|\varphi(t, x_n) - \varphi(t, x)\| &\leq \|x_n - x\| + \left\| \int_0^t f(\varphi(s; x_n)) - f(\varphi(s; x)) ds \right\| \\ &\leq \|x_n - x\| + \int_0^t L \|\varphi(s; x_n) - \varphi(s; x)\| ds. \end{aligned}$$

Wir führen jetzt den Beweis von Theorem 3.11(ii). Es sei $\varepsilon > 0$ so klein, dass $\mathbf{B}(0, 2\varepsilon) \subset U_0$. Dann existiert wegen der Stabilität ein $\delta > 0$, so dass für alle x_0 mit $\|x_0\| < \delta$ folgt, dass $\|\varphi(t, x_0)\| \leq \varepsilon$ für alle $t \geq 0$. Es reicht zu zeigen, dass für diese x_0 die Trajektorie für $t \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert. Gilt dies nicht, so existieren $t_k \rightarrow \infty$ mit $\varphi(t_k; x_0) \rightarrow x \neq 0$ mit $\|x\| \leq \varepsilon$; ferner ist $\varphi(t, x_0) \in U_0$ für alle $t \geq 0$. Wähle $T > 0$ wie in Lemma 3.13. Wir können annehmen, dass $t_k + T < t_{k+1}$ für alle k gilt. Ähnlich wie in (i) folgt aus $\dot{V} < 0$, dass

$$V(\varphi(T, x)) < V(x). \quad (3.10)$$

Ebenso ist unter Verwendung der Fluss-Eigenschaft

$$V(\varphi(t_{k+1}; x_0)) < V(\varphi(t_k + T, x_0)) = V(\varphi(T; \varphi(t_k; x_0))).$$

Wegen $\varphi(t_k; x_0) \rightarrow x$ folgt aus der Stetigkeit von V und Lemma 3.13

$$V(\varphi(t_{k+1}; x_0)) \rightarrow V(x) \text{ und } V(\varphi(T; \varphi(t_k; x_0)) \rightarrow V(\varphi(T, x)).$$

Wir erhalten

$$V(x) \leq V(\varphi(T, x))$$

im Widerspruch zu (3.10). ■

Der Beweis zeigt, dass eine strikte Lyapunov-Funktion verhindert, dass das System in positiver Distanz vom Gleichgewicht bleibt.

Bemerkung 3.14 *Die Methode, Lyapunov-Funktionen zum Nachweis von Stabilität einzusetzen, heißt auch die direkte Methode von Lyapunov, weil man sie anwenden kann, ohne Lösungen zu berechnen.*

Es gibt keine allgemeine Konstruktion von Lyapunov-Funktionen für stabile oder asymptotisch stabile Gleichgewichte. Für viele konkrete Systeme kann man aber (insbesondere physikalisch motivierte) Lyapunov-Funktionen finden, einige Beispiele werden in den Übungen diskutiert. Hier wenden wir uns jetzt der Frage zu, wie man für autonome lineare Differentialgleichungen Lyapunov-Funktionen konstruiert. Wir erinnern zunächst daran, dass eine symmetrische Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ positiv-definit ist, falls $x^\top Bx > 0$ für alle $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$. Dies ist äquivalent dazu, dass $-B$ negativ-definit ist. (Im weiteren steht positiv-definit für symmetrisch und positiv-definit).

Positiv-Definitheit von B bedeutet offenbar, dass die C^1 -Funktion

$$V(x) = x^\top Bx$$

eine positiv-definite Funktion auf $U_0 = \mathbb{R}^n$ ist. Um eine Lyapunov-Funktion zu konstruieren, suchen wir daher nach einer positiv definiten Matrix. Der folgende Satz ist das Hauptresultat zur asymptotischen Stabilität von linearen autonomen Differentialgleichungen.

Theorem 3.15 *Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sind äquivalent:*

- (i) *Die Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$ ist asymptotisch stabil.*
- (ii) *A hat nur Eigenwerte mit negativem Realteil.*
- (iii) *Es gibt eine positiv-definite Matrix $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so dass die Lyapunov-Gleichung*

$$A^\top B + BA = -C \tag{3.11}$$

eine positiv-definite Lösung $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ hat.

- (iv) *Für jede positiv-definite Matrix $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ hat die Lyapunov-Gleichung (3.11) eine positiv-definite Lösung $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.*

Beweis. Die Äquivalenz von (i) und (ii) ist in Theorem 3.4 gezeigt und trivialerweise impliziert (iv) die Bedingung (iii).

Für $V(x) = x^\top Bx = \langle x, Bx \rangle$ ist

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} y = \langle y, Bx \rangle + \langle x, By \rangle, \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

Also ergibt sich für die Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \frac{\partial V(x)}{\partial x} Ax = \langle Ax, Bx \rangle + \langle x, BAx \rangle = x^\top A^\top Bx + x^\top BAx \\ &= x^\top [A^\top B + BA] x.\end{aligned}$$

Gilt also (iii), ist B also eine positiv-definite Lösung von (3.11) für eine negativ-definite Matrix $-C$, so ist \dot{V} negativ-definit, und daher V eine Lyapunov-Funktion. Nach Theorem 3.11 folgt, dass $\dot{x} = Ax$ asymptotisch stabil ist. (iii) impliziert daher (i).

Gelte jetzt (ii), also alle Realteile von Eigenwerten seien negativ. Ferner sei C eine positiv-definite Matrix. Definiere

$$B := \int_0^\infty e^{A^\top t} C e^{At} dt.$$

Die Matrix B ist wohldefiniert: nach (3.4) existieren Konstanten $K, \kappa > 0$, so dass

$$\|e^{At}\| = \sup_{\|x\|=1} \|e^{At}x\| \leq \sup_{\|x\|=1} K e^{-\kappa t} \|x\| = K e^{-\kappa t}, \quad t \geq 0; \quad (3.12)$$

dann ist

$$\|e^{A^\top t} C e^{At}\| \leq K^2 \|C\| e^{-2\kappa t}, \quad t \geq 0,$$

weil A und A^\top die gleichen Eigenwerte haben und daher die gleiche Abschätzung (3.12) erfüllen. Daher ist diese Funktion integrierbar auf $[0, \infty)$ und dann existiert auch das Integral über die Matrizenfunktion. Ferner ist B symmetrisch und positiv-definit, denn

$$0 = x^\top Bx = x^\top \int_0^\infty e^{A^\top t} C e^{At} dt x = \int_0^\infty x^\top e^{A^\top t} C e^{At} x dt$$

impliziert, weil der Integrand nicht-negativ ist, dass $0 = x^\top e^{A^\top t} C e^{At} x = (e^{At}x)^\top C (e^{At}x)$ für alle $t \geq 0$, was für $t = 0$ mit der Positiv-Definitheit von C die Gleichung $x = 0$ impliziert. Dann ist B Lösung von (3.11), weil nach der Produktregel

$$\begin{aligned}A^\top B + BA &= \int_0^\infty [A^\top e^{A^\top t} C e^{At} + e^{A^\top t} C e^{At} A] dt = \int_0^\infty \frac{d}{dt} (e^{A^\top t} C e^{At}) dt \\ &= -C.\end{aligned}$$

Daher folgt (iv) und der Satz ist vollständig bewiesen. ■

Bemerkung 3.16 Die einfachste Lyapunov-Gleichung erhält man für $C = I$, also

$$A^\top B + BA = -I.$$

Wir werden jetzt Lyapunov-Funktionen anwenden, um eine fundamentale Aussage über nichtlineare Differentialgleichungen zu beweisen.

Betrachte

$$\dot{x} = f(x)$$

mit einer C^1 -Funktion f und Ruhelage $x^* \in D$. Anstelle der nichtlinearen Funktion verwenden wir die Linearisierung $Df(x^*) = \frac{\partial f(x)}{\partial x} \Big|_{x=x^*}$ und erhalten die autonome lineare Differentialgleichung

$$\dot{y} = Df(x^*)y.$$

Da die Stabilität dieser Differentialgleichung wesentlich einfacher zu bestimmen ist, möchten wir auf die Stabilität der Ruhelage der nichtlinearen Differentialgleichung zurückschließen. Solch eine Argumentation haben wir schon im einleitenden Kapitel bei der Diskussion des Pendels verwendet.

Theorem 3.17 *Für die Differentialgleichung (3.1) sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine C^1 -Funktion, $x^* \in D$, und $f(x^*) = 0$. Ist $0 \in \mathbb{R}^n$ ein asymptotisch stabiles Gleichgewicht für die linearisierte Differentialgleichung*

$$\dot{y} = Df(x^*)y \tag{3.13}$$

so ist $x^* \in \mathbb{R}^n$ ein asymptotisch stabiles Gleichgewicht für (3.1).

Beweis. Nach Theorem 3.15 existiert für (3.13) eine strikte Lyapunov-Funktion auf \mathbb{R}^n in der Form

$$V(y) = y^\top B y,$$

wobei $A^\top B + BA = -I$ gilt. Wir zeigen, dass

$$\hat{V}(x) := (x - x^*)^\top B(x - x^*).$$

für (3.1) eine Lyapunov-Funktion auf einer Umgebung von x^* ist. Dafür ist nur zu zeigen, dass $\frac{\partial \hat{V}}{\partial x}(x) \cdot f(x) < 0$ gilt für $x \neq x^*$ in einer Umgebung von x^* . Nach Definition der Differenzierbarkeit gilt

$$f(x) = Df(x^*)(x - x^*) + h(x - x^*) \quad \text{mit} \quad \lim_{x \rightarrow x^*} \frac{h(x - x^*)}{\|x - x^*\|} = 0.$$

Wir schreiben auch kurz $A := Df(x^*)$. Für (3.1) berechnet man

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \hat{V}(x)}{\partial x} f(x) \\ &= \langle f(x), B(x - x^*) \rangle + \langle x - x^*, Bf(x) \rangle \\ &= \langle A(x - x^*) + h(x - x^*), B(x - x^*) \rangle + \langle x - x^*, BA(x - x^*) + Bh(x - x^*) \rangle \\ &= (x - x^*)^\top A^\top B(x - x^*) + h(x - x^*)^\top B(x - x^*) \\ &+ (x - x^*)^\top BA(x - x^*) + (x - x^*)^\top Bh(x - x^*) \\ &= (x - x^*)^\top [A^\top B + BA](x - x^*) + 2h(x - x^*)^\top B(x - x^*) \\ &= -\|x - x^*\|^2 + 2h(x - x^*)^\top B(x - x^*). \end{aligned}$$

Nun ist

$$|h(x - x^*)^\top B(x - x^*)| \leq \frac{h(\|x - x^*\|)}{\|x - x^*\|} \|B\| \|x - x^*\|^2;$$

hier geht der erste Faktor gegen 0 für $\|x - x^*\| \rightarrow 0$. Es folgt also $\frac{\partial \hat{V}(x)}{\partial x} f(x) < 0$ für $\|x - x^*\| < \alpha$ mit $\alpha > 0$ klein genug. Auf der α -Kugel $B(x^*, \alpha)$ um x^* ist \hat{V} also eine strikte Lyapunov-Funktion für (3.1). ■

Bemerkung 3.18 Aus der Existenz einer Lyapunov-Funktion folgt auch, dass die Lösungen für Anfangswerte nahe des Gleichgewichts auf $[0, \infty)$ existieren. Denn andernfalls werden sie auf einem endlichen Existenzintervall unbeschränkt.

Im Allgemeinen kann man von Eigenschaften der linearisierten Gleichung nur auf lokale Eigenschaften der nichtlinearen Gleichung schließen. Die Umkehrung von Theorem 3.17 gilt jedoch nicht, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 3.19 Betrachte die nichtlineare eindimensionale Differentialgleichung

$$\dot{x} = -x^3.$$

Durch Nachrechnen sieht man leicht, dass die Lösungen dieser Gleichung gegeben sind durch

$$x(t, x_0) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x_0 = 0 \\ (2t + 1/x_0^2)^{-1/2} & \text{falls } x_0 > 0 \\ -(2t + 1/x_0^2)^{-1/2} & \text{falls } x_0 < 0 \end{cases}.$$

Daher ist das Gleichgewicht $x^* = 0$ asymptotisch stabil (sogar global asymptotisch stabil). Die Linearisierung dieser Gleichung in diesem Gleichgewicht ist durch

$$\dot{y} = 0$$

gegeben und offenbar ist $y^* = 0$ für diese Gleichung zwar stabil, jedoch nicht asymptotisch stabil.

Bemerkung 3.20 Für autonome lineare Differentialgleichungen folgt aus der asymptotischen Stabilität schon die exponentielle Abschätzung (3.4). Daher kann man vermuten, dass exponentielle Stabilität einer Ruhelage einer nichtlinearen Differentialgleichung die asymptotische (also exponentielle) Stabilität der linearisierten Differentialgleichung impliziert. Dies ist in der Tat richtig (Grüne/Junge [5, Satz 9.8]).

Kapitel 4

Feedback und Stabilisierung

In diesem Kapitel werden wir analysieren, wann Feedbacks existieren, unter denen ein Gleichgewicht stabil wird. Zunächst diskutieren wir Linearisierung an einem Gleichgewicht. Dann konstruieren wir stabilisierende Feedbacks für lineare Kontrollsysteme.

4.1 Linearisierung an einem Gleichgewicht

In diesem Abschnitt diskutieren wir die Linearisierung an einem Gleichgewicht.

Aus dem letzten Kapitel sind die folgenden Resultate aus der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen bekannt: Betrachte eine nichtlineare Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = f(y(t)) \text{ mit einer } C^1 \text{-Funktion } f,$$

und nimm an, dass Lösungen $\varphi^t(y_0)$ zu Anfangswerten $y(0) = y_0$ für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$ existieren. Sei $y^* \in \mathbb{R}^n$ ein Gleichgewicht, also $f(y^*) = 0$. Dann gilt nach der Kettenregel für $t \in \mathbb{R}$ und $A := \frac{\partial}{\partial y}|_{y=y^*} f(y)$

$$\frac{\partial}{\partial y}|_{y=y^*} \varphi^t(y)x_0 = e^{At}x_0,$$

d.h. die Ableitung der Lösung nach dem Anfangswert in Richtung x_0 ist die Lösung der linearisierten Differentialgleichung

$$\dot{x} = Ax \text{ mit Anfangswert } x(0) = x_0.$$

Ferner ist y^* lokal exponentiell stabil, wenn das Gleichgewicht $x^* = 0$ ihrer Linearisierung global exponentiell stabil ist, also wenn alle Eigenwerte von A negativen Realteil haben; siehe dazu z.B. Aulbach [2, Satz 7.6.3].

Ein allgemeines nichtlineares Kontrollsystem ist gegeben durch die Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = f(y(t), u(t)) \tag{4.1}$$

mit $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ und Kontrollfunktionen u . Wir nehmen an, dass für $u^* = 0$ der Punkt $y^* = 0$ ein Gleichgewicht ist, d.h., $f(0, 0) = 0$. Ferner sei die

Abbildung f in $(y^*, u^*) = (0, 0)$ sowohl nach y als auch nach u stetig differenzierbar. Dann können wir die Linearisierung definieren als

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (4.2)$$

mit

$$A = \left. \frac{\partial}{\partial y} \right|_{(y,u)=(0,0)} f(y, u), \quad B = \left. \frac{\partial}{\partial u} \right|_{(y,u)=(0,0)} f(y, u).$$

Das folgende Lemma zeigt, wie diese Linearisierungen von Differentialgleichungen und Kontrollsystemen für lineares Feedback F zusammenhängen.

Lemma 4.1 *Betrachte ein nichtlineares Kontrollsystem (4.1) und seine Linearisierung (4.2) im Gleichgewicht $(0, 0)$. Sei $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung. Dann ist die lineare Differentialgleichung*

$$\dot{x}(t) = (A + BF)x(t)$$

die Linearisierung in $y^* = 0$ der nichtlinearen Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = f(y(t), Fy(t)).$$

Beweis. Wir müssen nachweisen, dass

$$\left. \frac{d}{dy} \right|_{y=0} f(y, Fy) = A + BF$$

gilt. Sei dazu $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ gegeben durch $G(y) = (y, Fy)$, wobei wir (y, Fy) als $(n+m)$ -dimensionalen Spaltenvektor interpretieren. Dann folgt nach der Kettenregel

$$\frac{d}{dy} f(y, Fy) = \frac{d}{dy} f(G(y)) = \left. \frac{\partial}{\partial y} \right|_{(y,u)=G(y)} f(y, u) + \left. \frac{\partial}{\partial u} \right|_{(y,u)=G(y)} f(y, u)F.$$

Also ist in $y = 0$

$$\left. \frac{d}{dy} \right|_{y=0} f(y, Fy) = \left. \frac{\partial}{\partial y} \right|_{(y,u)=(0,0)} f(y, u) + \left. \frac{\partial}{\partial u} \right|_{(y,u)=(0,0)} f(y, u)F = A + BF.$$

■

Damit erhalten wir das folgende lokale Stabilisierungsergebnis (stabilisierbar bedeutet hier asymptotisch stabilisierbar).

Theorem 4.2 *Ein nichtlineares Kontrollsystem (4.1) ist durch ein lineares Feedback lokal stabilisierbar, wenn seine Linearisierung (4.2) durch ein lineares Feedback global stabilisierbar ist. Darüberhinaus ist das Gleichgewicht $y^* = 0$ der Gleichung*

$$\dot{y} = f(y(t), Fy(t))$$

lokal stabil für jedes lineare Feedback F , das das Stabilisierungsproblem für das linearisierte System löst.

Aus der linearen Struktur des Feedbacks F ergibt sich also, dass wir nichtlineare Stabilisierungsprobleme lokal lösen können, indem wir lineare Stabilisierungsprobleme lösen.

4.2 Stabilisierung Linearer Kontrollsysteme

Wir wenden uns der Stabilisierung linearer Kontrollsysteme zu.

Wir werden zunächst zwei nützliche Koordinatentransformationen für Kontrollsysteme betrachten. Beachte, dass für eine Transformationsmatrix $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ das zu

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (4.3)$$

gehörige transformierte System für $z = T^{-1}x$

$$\dot{z}(t) = \tilde{A}z(t) + \tilde{B}u(t) \quad (4.4)$$

durch $\tilde{A} = T^{-1}AT$ und $\tilde{B} = T^{-1}B$ gegeben ist. Ein Feedback F für (4.3) wird mittels $\tilde{F} = FT$ in eines für (4.4) transformiert (dies folgt sofort aus $T^{-1}(A + BF)T = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F}$). Aus der Erreichbarkeitsmatrix $R = [B, AB, \dots, A^{n-1}B]$ für (4.3) erhält man die Erreichbarkeitsmatrix $\tilde{R} = T^{-1}R$ für (4.4). Das folgende Lemma (vgl. auch den Beweis des Hautus-Kriteriums, Theorem 2.14) zeigt, dass man für beliebige Matrix-Paare (A, B) durch eine geeignete Koordinatentransformation erreichen kann, dass das System in einen kontrollierbaren und einen nicht-kontrollierbaren Anteil zerlegt wird.

Lemma 4.3 *Es sei $(A, B) \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times m}$. Dann gibt es eine Koordinatentransformation T , so dass*

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} \text{ und } \tilde{B} = T^{-1}B = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit $A_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ist und (A_1, B_1) kontrollierbar ist.

Beweis. Dies folgt mit Standardargumenten der linearen Algebra, wenn man eine Basis des Erreichbarkeitsuntertraums $O^+(0) = \mathcal{R} = \langle A | \text{Im } B \rangle$ vom Ursprung zu einer Basis von \mathbb{R}^n ergänzt und die Spalten von T als diese Basisvektoren definiert. ■

Die zweite Koordinatentransformation, die wir betrachten wollen, gilt für kontrollierbare Systeme, bei denen u eindimensional ist, also $m = 1$ und $B = b \in \mathbb{R}^n$.

Lemma 4.4 *Ein Paar $(A, b) \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^n$ ist genau dann kontrollierbar, wenn es eine Koordinatentransformation S in die sogenannte Regelungsnormalform gibt,*

$$\tilde{A} = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \dots & \alpha_{n-1} \end{pmatrix} \text{ und } \tilde{b} = S^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

hierbei sind die α_i die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms χ_A von A , d.h., $\chi_A(z) = z^n - \alpha_{n-1}z^{n-1} - \dots - \alpha_1z - \alpha_0$.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass für Matrizen \tilde{A} der angegebenen Form die α_i gerade die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms sind. Dies folgt durch Induktion über n : Für $n = 1$ ist die Behauptung sofort klar. Für den Induktionsschritt nehmen wir an, dass die Behauptung für alle Matrizen $A_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt. Sei $A_{n+1} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ von der obigen Form. Dann kann man A_{n+1} für eine Matrix A_n der obigen Form folgendermaßen schreiben:

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_n & \\ \alpha_0 & & & \end{pmatrix}.$$

Entwickeln wir nun $\det(zI - A_{n+1})$ nach der ersten Spalte, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \chi_{A_{n+1}}(z) &= z \det(zI_n - A_n) - \alpha_0(-1)^{n+2}(-1)^n \\ &= z\chi_{A_n}(z) - \alpha_0 \\ &= z^{n+1} - \alpha_{n-1}z^n - \cdots - \alpha_1z - \alpha_0, \end{aligned}$$

also gerade der gewünschte Ausdruck.

Es existiere eine Transformation S mit den angegebenen Eigenschaften. Durch Nachrechnen sieht man leicht, dass

$$\tilde{R} = (\tilde{b} \quad \tilde{A}\tilde{b} \quad \cdots \quad \tilde{A}^{n-1}\tilde{b}) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdot & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 1 & * & \cdots & * \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

gilt, wobei $*$ beliebige Werte bezeichnet. Diese Matrix hat vollen Rang, denn durch Umordnung der Zeilen erhalten wir eine obere Dreiecksmatrix mit lauter Einsen auf der Diagonalen, welche offenbar invertierbar ist, also vollen Rang besitzt. Daher ist (\tilde{A}, \tilde{b}) kontrollierbar und da Kontrollierbarkeit unter Koordinatentransformationen erhalten bleibt, ist auch das Paar (A, b) kontrollierbar.

Sei umgekehrt (A, b) kontrollierbar. Dann ist die Erreichbarkeitsmatrix $R = [b, Ab, \dots, A^{n-1}b]$ invertierbar. Wir zeigen nun zunächst, dass $R^{-1}AR = \tilde{A}^\top$, d.h., dass $AR = R\tilde{A}^\top$ ist. Dies folgt (unter Verwendung des Satzes von Cayley-Hamilton) aus

$$\begin{aligned} AR &= A[b, Ab, \dots, A^{n-1}b] \\ &= [Ab, A^2b, \dots, A^{n-1}b, \alpha_{n-1}A^{n-1}b + \cdots + \alpha_0b] \\ &= [b, Ab, \dots, A^{n-1}b] \begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \alpha_0 \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \alpha_1 \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \alpha_{n-1} \end{pmatrix} = R\tilde{A}^\top. \end{aligned}$$

Eine analoge Rechnung mit \tilde{R} aus (4.5) liefert $\tilde{R}^{-1}\tilde{A}\tilde{R} = \tilde{A}^\top$ und damit

$$\tilde{A} = \tilde{R}\tilde{A}^\top\tilde{R}^{-1} = \tilde{R}R^{-1}AR\tilde{R}^{-1}.$$

Ferner ist offensichtlich $R(1, 0, \dots, 0)^\top = b$ und $\tilde{R}(1, 0, \dots, 0)^\top = \tilde{b}$, also $R\tilde{R}^{-1}\tilde{b} = b$. Damit ist $S = R\tilde{R}^{-1}$ die gesuchte Transformationsmatrix. ■

Bemerkung 4.5 In der Regelungsnormalform enthält das System eine Kette von $n - 1$ Integratoren, erst in der letzten Gleichung erscheint die Kontrolle explizit.

Wir werden das Stabilisierungsproblems zunächst für skalare Kontrolle, also $m = 1$, lösen. Der allgemeine Fall wird dann darauf zurückgeführt. Zunächst drücken wir das Stabilisierungsproblem mit Hilfe des charakteristischen Polynoms aus. Dies hängt eng mit dem Hautus-Kriterium für Kontrollierbarkeit zusammen.

Definition 4.6 Für ein Kontrollsystem (4.3) heißt ein Polynom χ vorgebar, falls ein lineares Feedback F existiert, so dass χ gleich dem charakteristischen Polynom χ_{A+BF} von $A + BF$ ist.

Offenbar existiert ein stabilisierendes Feedback F genau dann, wenn ein vorgebares Polynom existiert, dessen Nullstellen nur negative Realteile haben.

Die folgende Proposition zeigt für skalare Kontrollen die Beziehung zwischen Kontrollierbarkeit und Vorgebarkeit von Polynomen.

Proposition 4.7 Betrachte das Kontrollsystem (4.3) mit skalarer Kontrolle, also $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$. Dann sind äquivalent:

- (i) Das Paar (A, B) ist kontrollierbar.
- (ii) Jedes Polynom der Form $\chi(z) = z^n - \beta_{n-1}z^{n-1} - \dots - \beta_1z - \beta_0$ mit $\beta_i \in \mathbb{R}$ ist vorgebar.

Beweis. (i) \Rightarrow (ii): Sei (A, B) kontrollierbar und sei S die Koordinatentransformation aus Lemma 4.4. Wir setzen

$$\tilde{F} = (\beta_0 - \alpha_0, \beta_1 - \alpha_1, \dots, \beta_{n-1} - \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^{1 \times n}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} & \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \dots & \dots & \alpha_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix} (\beta_0 - \alpha_0, \beta_1 - \alpha_1, \dots, \beta_{n-1} - \alpha_{n-1}) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ \beta_0 & \beta_1 & \dots & \dots & \dots & \beta_{n-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Daher ist nach Lemma 4.4 das charakteristische Polynom von $\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F}$ gleich χ .

(ii) \Rightarrow (i): Es sei T die Koordinatentransformation aus Lemma 4.3. Dann ergibt sich für jedes beliebige Feedback $\tilde{F} = (F_1, F_2)$

$$\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F} = \begin{pmatrix} A_1 + B_1F_1 & A_2 + B_1F_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom dieser Matrix ist

$$\chi_{\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F}} = \chi_{A_1 + B_1 F_1} \cdot \chi_{A_3},$$

daher sind (beachte, dass (A_1, B_1) kontrollierbar ist) die vorgebbaren Polynome gerade von der Form $\chi = \chi^c \chi^u$, wobei χ^c ein beliebiges normiertes Polynom vom Grad d ist und $\chi^u = \chi_{A_3}$ ist. Bedingung (ii) kann offenbar nur gelten, wenn die Teilmatrix A_3 nicht vorhanden ist, also das System kontrollierbar ist. Damit ist Theorem 4.7 bewiesen. ■

Das Polynom $\chi^u = \chi_{A_3}$ wird auch als unkontrollierbarer Teil des charakteristischen Polynoms von A bezeichnet. Natürlich ist es zur Stabilisierung nicht notwendig, dass jedes Polynom vorgebar ist, wir brauchen lediglich eines zu finden, dessen Nullstellen nur negative Realteile haben. Der Beweis von Satz 4.7 zeigt, wann dies möglich ist: Man benötigt, dass der unkontrollierbare Teil des charakteristischen Polynoms nur Nullstellen mit negativem Realteil hat.

Das folgende Lemma, Heymanns Lemma, erlaubt es uns, den allgemeinen Fall auf den Fall $m = 1$ zurückzuführen.

Lemma 4.8 *Das Paar $(A, B) \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{m \times n}$ sei kontrollierbar. Sei $v \in \mathbb{R}^m$ mit $b := Bv \neq 0$. Dann existiert $F \in \mathbb{R}^{n \times m}$, so dass $(A + BF, b)$ kontrollierbar ist.*

Beweis. Mittels einer rekursiven Vorschrift konstruieren wir uns zunächst linear unabhängige Vektoren $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$ mit der folgenden Eigenschaft: Für alle $i \in \{1, \dots, n-1\}$ gilt

$$Ax_i \in V_{i+1} = \langle x_1, \dots, x_{i+1} \rangle. \quad (4.6)$$

Definiere $x_1 := b \neq 0$. Jetzt seien für $k \leq n-1$ linear unabhängige Vektoren x_1, \dots, x_k gegeben, so dass für alle $i = 1, \dots, k-1$ die Bedingung (4.6) erfüllt ist. Wir konstruieren einen Vektor x_{k+1} , so dass x_1, \dots, x_k, x_{k+1} linear unabhängig sind und gilt

$$x_k \in V_{k+1} = \langle x_1, \dots, x_{k+1} \rangle.$$

1. Fall: $Ax_k \notin V_k$: Setze $u_k := 0 \in \mathbb{R}^m$ und $x_{k+1} := Ax_k + Bu_k = Ax_k$. Offenbar gilt dann auch die lineare Unabhängigkeit.

2. Fall: $Ax_k \in V_k$: Wegen (4.6) folgt dann, dass V_k ein A -invarianter Unterraum ist. Weil (A, B) kontrollierbar ist, gilt für den kleinsten A -invarianten Unterraum des \mathbb{R}^n , der das Bild von B enthält, dass $\mathbb{R}^n = \langle A | \text{Im } B \rangle$. Weil V_k ein A -invarianter Unterraum mit $\dim V_k = k < n$ ist, kann dieser das Bild von B also nicht enthalten. Daher gibt es ein $u_k \in \mathbb{R}^m$ mit $Bu_k \notin V_k$ und daher $Ax_k + Bu_k \notin V_k$ und wir setzen $x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$.

Wir konstruieren nun die gesuchte Abbildung F aus x_1, \dots, x_n . Da die x_i linear unabhängig sind, ist die Matrix $X = [x_1, \dots, x_n]$ invertierbar, und wir können $F := UX^{-1}$ für $U = [u_1, \dots, u_n] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ definieren, wobei die u_i für $i = 1, \dots, n-1$ die in der obigen Rekursion verwendeten Kontrollvektoren sind und $u_n := 0 \in \mathbb{R}^m$ gesetzt wird. Damit gilt $Fx_i = u_i$ und deswegen $(A + BF)x_i = x_{i+1}$ für $i = 1, \dots, n-1$. Wegen $b = x_1$ folgt somit

$$[b, (A + BF)b, \dots, (A + BF)^{n-1}b] = X,$$

also hat diese Matrix den Rang n und $(A + BF, b)$ ist kontrollierbar. ■

Mit diesem Resultat lässt sich nun die Proposition 4.7 leicht auf beliebige Kontrolldimension verallgemeinern.

Theorem 4.9 Für das System (4.3) sind äquivalent:

- (i) Das Paar (A, B) ist kontrollierbar.
- (ii) Jedes Polynom χ vom Grad n ist vorgebar.

Beweis. (i) \Rightarrow (ii): Sei (A, B) kontrollierbar und χ gegeben. Seien $F_1 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und $b = Bv \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ die in Lemma 4.8 konstruierten Matrizen. Dann ist das Paar $(A + BF_1, b)$ kontrollierbar und aus Satz 4.7 folgt die Existenz eines Feedbacks $F_2 \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, so dass

$$\chi_{A+BF_1+bF_2} = \chi$$

ist. Wegen

$$A + BF_1 + bF_2 = A + BF_1 + BvF_2 = A + B(F_1 + vF_2)$$

ist also $F = F_1 + vF_2$ das gesuchte Feedback.

(ii) \Rightarrow (i): Völlig analog zum Beweis von Satz 4.7. ■

Für den allgemeinen, nicht notwendigerweise kontrollierbaren Fall erhält man das folgende grundlegende Resultat.

Theorem 4.10 Für das System (4.3) sind die vorgebbaren Polynome gerade die Polynome der Form

$$\chi = \chi^c \chi^u,$$

wobei χ^c ein beliebiges normiertes Polynom vom Grad $d = \langle A | \text{Im } B \rangle$ ist und χ^u der unkontrollierbare Teil des charakteristischen Polynoms von A . Insbesondere ist das Stabilisierungsproblem genau dann lösbar, wenn alle Nullstellen von χ^u negativen Realteil haben.

Beweis. Dies ergibt sich unmittelbar aus den obigen Beweisen. ■

Dieser Satz, der zentral für die lineare Kontrolltheorie ist, wird oft als *Polverschiebungssatz* bezeichnet, da die Nullstellen des charakteristischen Polynoms in der Kontrolltheorie auch als Pole bezeichnet werden und der Satz angibt, wie man diese Nullstellen durch geeignete Wahl des Feedbacks verschieben kann.

Bemerkung 4.11 Die Bezeichnung „Pole“ für die Nullstellen des charakteristischen Polynoms von A erklärt sich folgendermaßen. Betrachte die Anfangsbedingung $x(0) = 0$. Die Laplace-Transformierten von u und der zugehörigen Lösung x sind (formal) gegeben durch

$$\hat{u}(s) := \int_0^\infty e^{-st} u(t) dt \text{ und } \hat{x}(s) := \int_0^\infty e^{-st} x(t) dt, \quad s \in \mathbb{C}.$$

Durch partielle Integration erhält man

$$\int_0^\infty e^{-st} \dot{x}(t) dt = -e^{-st} x(t) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty (-s) e^{-st} x(t) dt = s \int_0^\infty e^{-st} x(t) dt = s \hat{x}.$$

Differentiation von x bedeutet für die Laplace-Transformierte also Multiplikation mit s . Wir erhalten

$$s \hat{x}(s) = A \hat{x}(s) + B \hat{u}(s)$$

oder

$$\hat{x}(s) = (sI - A)^{-1} B \hat{u}(s).$$

Die Nullstellen von $sI - A$ sind die Pole von $(sI - A)^{-1} B$.

Wir schließen diese Diskussion von Stabilisierung durch Zustandsfeedback mit einem einfachen Beispiel.

Beispiel 4.12 Wir betrachten ein (sehr einfaches) Modell für eine Heizungsregelung. Nehmen wir an, dass wir die Temperatur x_1 in einem Raum an einem festgelegten Messpunkt regeln wollen. Der Einfachheit halber sei die gewünschte Temperatur auf $x_1 = 0$ normiert. In dem Raum befindet sich ein Heizkörper mit Temperatur x_2 , auf die wir mit der Kontrolle u Einfluss nehmen können. Die Veränderung von x_2 sei durch die Differentialgleichung

$$\dot{x}_2(t) = u(t)$$

beschrieben, d.h. die Kontrolle u regelt die Zunahme (falls $u > 0$) bzw. Abnahme (falls $u < 0$) der Temperatur. Für die Temperatur x_1 im Messpunkt nehmen wir an, dass sie der Differentialgleichung

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t) + x_2(t)$$

genügt, d.h. für konstante Heiztemperatur x_2 ergibt sich

$$x_1(t) = e^{-t}x_1(0) + (1 - e^{-t})x_2$$

Mit anderen Worten, wir nehmen an, dass die Raumtemperatur x_1 im Messpunkt exponentiell gegen die Temperatur des Heizkörpers konvergiert. Dabei sei jetzt die Temperatur der Heizung nicht messbar (also auch $x_2(t) = 0$ für $t \geq 0$ nicht realisierbar) Aus diesem Modell erhalten wir das Kontrollsystem

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t).$$

Eine naheliegende Regelstrategie ergibt sich nun wie folgt: Falls $x_1 > x_1^* = 0$ ist, so vermindern wir die Temperatur in x_2 , d.h., wir wählen $u < 0$. Im umgekehrten Fall, d.h. falls $x_1 < x_1^* = 0$ ist, erhöhen wir die Temperatur und setzen $u > 0$. Da unser Feedback linear sein soll, lässt sich dies durch die Wahl $F(x) = -\lambda x_1$ für ein $\lambda > 0$ erreichen, oder, in Matrix-Schreibweise, $F(x) = (-\lambda, 0)$ (hier ist $n = 2$ und $m = 1$). Damit erhalten wir das rückgekoppelte System

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix} x(t).$$

Berechnet man die Eigenwerte für $\lambda > 0$, so sieht man, dass alle Realteile negativ sind. Wir haben also das Stabilisierungsproblem gelöst und folglich konvergieren $x_1(t)$ und $x_2(t)$ für alle Anfangswerte exponentiell schnell gegen 0, insbesondere konvergiert x_1 exponentiell schnell gegen die gewünschte Temperatur $x_1^* = 0$. Falls wir die Temperatur x_2 am Heizkörper messen können, so können wir auch $F(x) = -\lambda x_2$, bzw. $F = (0, -\lambda)$ setzen. Wiederum sieht man durch Betrachtung der Eigenwerte, dass das rückgekoppelte System für alle $\lambda > 0$ exponentiell stabil ist.

4.3 Störungsentkopplung

Die Methoden, die wir bisher eingesetzt haben, um Kontrollierbarkeit und Stabilisierung zu diskutieren, erlauben auch die Analyse eines anderen relevanten

Problems der Kontrolltheorie: Wie kann man durch Feedback den Einfluss von Störungen auf den Output verhindern?

Dazu betrachten wir das folgende System

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Ew(t) \\ y(t) &= Cx(t); \end{aligned} \quad (4.7)$$

hierbei ist $E : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^n$ linear und die Funktionen $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^l$ werden als Störungen interpretiert, die auf das System wirken. Wir nehmen im Folgenden an, dass die Störungen stetig, aber sonst beliebig sind.

Wir nennen (4.7) *störungsentkoppelt*, falls der Output $y(\cdot)$ nicht von den Störungen $w(\cdot)$ abhängt. Mit der Variation-der-Konstanten-Formel bedeutet dies, dass für alle stetigen $w(\cdot)$

$$C \int_0^t e^{A(t-s)} Ew(s) ds = 0 \text{ für } t \geq 0.$$

Wir können dies, mit $H(t) = Ce^{At}E$, auch als Faltung schreiben,

$$(H * w)(t) = \int_0^t H(t-s)w(s) ds = 0 \text{ für } t \geq 0.$$

Lemma 4.13 *Das System (4.7) ist störungsentkoppelt genau dann, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:*

- (i) $Ce^{At}E = 0$ für alle $t \geq 0$;
- (ii) $CA^kE = 0$ für alle $k = 0, 1, \dots, n-1$;
- (iii) $\langle A | \text{Im } E \rangle \subset \ker C$;
- (iv) $\text{Im } E \subset \bigcap_{i=0}^{n-1} \ker(CA^i)$.

Beweis: in den Übungen.

Wir wollen Störungsentkopplung durch Anwendung von Feedbacks erreichen und betrachten daher das folgende Problem.

Definition 4.14 (*Störungsentkopplungsproblem, Disturbance Decoupling Problem, DDP*) *Finde für das System (4.7) eine lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, so dass*

$$\langle A + BF | \text{Im } E \rangle \subset \ker C.$$

Nach dem vorangehenden Lemma ist diese Bedingung äquivalent zu

$$\text{Im } E \subset \bigcap_{i=0}^{n-1} \ker(C(A + BF)^i).$$

Offenbar ist das Problem genau dann lösbar, wenn für ein passendes F ein $(A + BF)$ -invarianter Unterraum zwischen $\text{Im } E$ und $\text{Ker } C$ existiert.

Definition 4.15 *Ein linearer Unterraum V von \mathbb{R}^n heisst (A, B) -invariant, wenn es ein lineares Feedback F mit $(A + BF)V \subset V$ gibt. Für einen linearen Unterraum W von \mathbb{R}^n sei $\mathcal{J}(A, B; W)$ die Menge aller (A, B) -invarianten Unterräume, die in W enthalten sind. Dann wird F auch Freund von (A, B) genannt.*

Das folgende Lemma charakterisiert (A, B) -invariante Unterräume.

Lemma 4.16 *Für einen Unterraum $V \subset \mathbb{R}^n$ sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:*

(i) V ist (A, B) -invariant;

(ii) $AV \subset V + \text{Im } B$;

(iii) Für alle $v \in V$ gibt es eine stetige Kontrollfunktion u , so dass die zugehörige Lösung von $\dot{x} = Ax + Bu$, $x(0) = v$, für alle $t \geq 0$ in V bleibt.

Beweis. (i) impliziert (iii), wenn man für einen Anfangswert $v \in V$ die Kontrolle $u(t) = Fx(t)$ wählt, wobei x die Lösung des Feedbacksystems $\dot{x} = (A + BF)x$ zum Anfangswert $x(0) = v$ ist.

Gilt (iii) und ist $v \in V$, so existiert eine stetige Kontrolle u so dass die zugehörige Lösung $\dot{x} = Ax + Bu$, $x(0) = v$, für alle $t \geq 0$ in V bleibt. Also gilt insbesondere

$$V \ni \dot{x}(0) = Ax(0) + Bu(0) = Av + Bu(0)$$

Also ist $Av \in V + \text{Im } B$, d.h. (ii) gilt.

Gilt (ii), so wählen wir eine Basis v_1, \dots, v_k von V . Dann existieren $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}^m$ mit

$$Av_i + Bu_i \in V \text{ für alle } i.$$

Definiere eine lineare Abbildung $F_0 : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ durch $F_0 v_i = u_i$ und lineare Fortsetzung auf V . Jede lineare Fortsetzung auf \mathbb{R}^n erfüllt dann (i). ■

Unter den (A, B) -invarianten Unterräumen gibt es einen größten.

Proposition 4.17 (i) *Jeder Unterraum W von \mathbb{R}^n enthält einen eindeutigen größten (A, B) -invarianten Unterraum, den wir mit $\max \mathcal{J}(A, B; W)$ bezeichnen.*

(ii) *Es gilt $\max \mathcal{J}(A, B; W) = \{v \in W \mid x(t) \in W, t \geq 0, \text{ für } \dot{x} = Ax + Bu, x(0) = v, \text{ und ein stetiges } u\}$.*

Beweis. (i) Wegen der endlichen Dimension existiert ein Unterraum maximaler Dimension in $\mathcal{J}(A, B; W)$. Aus (ii) in Lemma 4.16 folgt, dass die Summe von (A, B) -invarianten Unterräumen in W wieder ein (A, B) -invarianter Unterraum in W ist. Sind also V und V' Unterräume maximaler Dimension, so ist auch $V + V'$ ein (A, B) -invarianter Unterraum in W . Dann folgt aber $V = V' = V + V'$.

(ii) Wegen der Linearität ist die Menge auf der rechten Seite ein Unterraum von W , und er enthält $\max \mathcal{J}(A, B; W)$. Er ist auch (A, B) -invariant, weil er die Eigenschaft in Lemma 4.16(iii) erfüllt, also folgt Gleichheit. ■

Daraus erhalten wir leicht die Charakterisierung der Lösbarkeit von (DDP).

Proposition 4.18 *Das Störungsentkopplungsproblem ist lösbar genau dann, wenn $\text{Im } E \subset \max \mathcal{J}(A, B; \ker C)$.*

Beweis. Sei $\text{Im } E \subset \max \mathcal{J}(A, B; \ker C) =: V$. Dann gibt es ein lineares Feedback F mit

$$(A + BF)V \subset V \subset \ker C \text{ und } \text{Im } E \subset V.$$

Weil $\text{Im } E$ in V enthalten ist, liegt auch der kleinste $(A + BF)$ -invariante Unterraum, der $\text{Im } E$ enthält, in $\ker C$,

$$\langle A + BF \mid \text{Im } E \rangle \subset V \subset \ker C,$$

das heisst, (DDP) ist lösbar.

Sei umgekehrt (DDP) lösbar. Es gibt dann F so dass

$$V := \langle A + BF \mid \text{Im } E \rangle \subset \ker C.$$

Der Unterraum V ist natürlich $(A + BF)$ -invariant und enthält $\text{Im } E$. Also ist V ein (A, B) -invarianter Unterraum in $\ker C$, und die Behauptung folgt. ■

Dies Proposition reduziert die Lösung von (DDP) auf die Berechnung von größten (A, B) -invarianten Unterräumen in einem gegebenen Unterraum. Dies Problem wird im nächsten Abschnitt genauer analysiert.

4.4 Ein Algorithmus für invariante Unterräume

Das Problem der Störungsentkopplung konnten wir auf die Berechnung des größten (A, B) -invarianten Unterraums, der im Kern von C enthalten ist, zurückführen. In diesem Abschnitt wird ein Algorithmus beschrieben, der es erlaubt, iterativ den größten (A, B) -invarianten Unterraum, der in einem beliebigen Unterraum W enthalten ist, zu berechnen.

Der Algorithmus ist am einfachsten für zeitdiskrete Kontrollsystem der Form

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, k \geq 0,$$

zu beschreiben; hierbei sei wieder $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Für eine Input-Sequenz $u = (u_0, u_1, \dots)$ und einen Anfangszustand $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ist die Trajektorie in diskreter Zeit gegeben durch $x = (x_0, x_1, \dots)$. Hier ist der größte (A, B) -invariante Unterraum, der in einem Unterraum W enthalten ist, offenbar (vgl. Proposition 4.17(ii))

$$\{x_0 \in \mathbb{R}^n \mid \text{es gibt } u \text{ mit Trajektorie } x_i \in W \text{ für } i \geq 0\}.$$

Definiere eine Folge von Unterräumen V_0, V_1, \dots durch

$$V_t := \{x_0 \in \mathbb{R}^n \mid \text{es gibt } u \text{ mit } x_0, x_1, \dots, x_t \in W\}.$$

In der Tat ist V_t ein Unterraum und es gilt $V_0 = W \supset V_1 \supset \dots$. Wir erhalten die folgende Rekurrenzrelation für die V_t . Ein Punkt $x_0 \in V_{t+1}$ genau dann, wenn $x_0 \in W$ und es $u_0 \in \mathbb{R}^m$ mit $x_1 := Ax_0 + Bu_0 \in V_t$ gibt, denn dies bedeutet, dass es eine Inputfolge $u = (u_0, \dots, u_n)$ mit $x_1 = Ax_0 + Bu_0 \in V_t$ gibt, also $x_2, \dots, x_{n+1} \in W$. Daher gilt

$$x_0 \in V_{t+1} \iff x_0 \in W \text{ und } Ax_0 \in V_t + \text{Im } B,$$

und letzteres bedeutet $x_0 \in A^{-1}(V_t + \text{Im } B)$. Es folgt

$$V_0 = W, V_{t+1} = W \cap A^{-1}(V_t + \text{Im } B). \quad (4.8)$$

Aus dieser Rekurrenzrelation folgt, dass $V_k = V_{k+1}$ für ein k impliziert, $V_k = V_l$ für alle $l \geq k$. Denn dann

$$V_k = V_{k+1} = W \cap A^{-1}(V_k + \text{Im } B) = W \cap A^{-1}(V_{k+1} + \text{Im } B) = V_{k+2}$$

etc. Weil die Folge der Unterräume V_t absteigend ist, folgt, dass es ein $k \leq n$ gibt, so dass $V_k = V_{k+1}$.

Behauptung: Dann ist $V_k = \max \mathcal{J}(A, B; W)$.

Die Inklusion $\max \mathcal{J}(A, B; W) \subset V_k$ folgt aus den Definitionen. Umgekehrt, sei $x_0 \in V_k = V_{k+1}$. Wir müssen eine Inputfolge (u_0, u_1, \dots) konstruieren, so dass die zugehörige Trajektorie (x_0, x_1, \dots) in W liegt. Weil $x_0 \in V_k = V_{k+1}$, gibt es u_0 mit $x_1 = Ax_0 + Bu_0 \in V_k$, also $x_0, x_1 \in W$. Wir argumentieren jetzt induktiv. Angenommen u_0, u_1, \dots, u_{s-1} sind gefunden, so dass $x_0, x_1, \dots, x_s \in W$ und $x_s \in V_k$. Indem wir wieder $V_k = V_{k+1}$ benutzen, finden wir u_s , so dass $x_{s+1} = Ax_s + Bu_s \in V_k$. Dies beweist die Behauptung.

Die Rekurrenzrelation (4.8) wird im Weiteren als der *Invariante-Unterraum-Algorithmus (IVA)* bezeichnet. Wir müssen noch seine Relevanz für Systeme in stetiger Zeit beweisen.

Theorem 4.19 *Gegeben sei ein lineares Kontrollsystem der Form $\dot{x} = Ax + Bu$. Sei W ein Unterraum von \mathbb{R}^n und $V_t, t = 0, 1, \dots$, die Unterraumfolge, die der (IVA) erzeugt. Dann gilt*

- (i) $V_0 = W \supset V_1 \supset \dots$,
- (ii) es gibt $k \leq n$ so dass $V_k = V_{k+1}$,
- (iii) Ist $V_k = V_{k+1}$, so folgt $V_k = V_l$ für alle $l \geq k$,
- (iv) Ist $V_k = V_{k+1}$, so folgt $\max \mathcal{J}(A, B; W) = V_k$.

Beweis. Die Behauptungen (i)-(iii) wurden oben bewiesen. Für (iv) beachte $V_k \subset W$. Ferner folgt aus (4.8), dass

$$AV_k = AV_{k+1} \subset V_k + \text{Im } B.$$

Daher ist V_k eine (A, B) -invarianter Unterraum von W und deswegen enthalten in $\max \mathcal{J}(A, B; W)$. Für die umgekehrte Inklusion müssen wir zeigen, dass $\max \mathcal{J}(A, B; W) \subset V_t$ für alle t . Das gilt natürlich für $t = 0$. Sei $\max \mathcal{J}(A, B; W) \subset V_{t-1}$. Weil $\max \mathcal{J}(A, B; W)$ ein (A, B) -invarianter Unterraum ist, gilt

$$A \max \mathcal{J}(A, B; W) \subset \max \mathcal{J}(A, B; W) + \text{Im } B \subset V_{t-1} + \text{Im } B,$$

also $\max \mathcal{J}(A, B; W) \subset W \cap A^{-1}(V_{t-1} + \text{Im } B) = V_t$. ■

Der Beweis zeigt, dass höchstens n Schritte des IVA-Algorithmus nötig sind, um den größten (A, B) -invarianten Unterraum in W zu berechnen.

Weitere Informationen zu diesem Algorithmus findet man zum Beispiel in Wonham [18], Knobloch/Kwakernaak [11] und Trentelman et al. [16]. Das Konzept der (A, B) -invarianten Unterräume geht auf Basile/Morro [4] zurück. Es ist insbesondere von M. Wonham zu einer systematischen geometrischen Kontrolltheorie ausgebaut worden. Man kann zum Beispiel zusätzlich fordern, dass das Feedback für die Störungskopplung das System auch stabilisiert. Dies werden wir ebenfalls analysieren.

4.5 Stabilisierbarkeit und Asymptotische Kontrollierbarkeit

In diesem Abschnitt geben wir eine weitere Charakterisierung der Stabilisierbarkeit von linearen Kontrollsystemen. Sie beruht auf einer open-loop-Eigenschaft,

die wir für allgemeine Kontrollsysteme formulieren. Wir betrachten ein nichtlineares Kontrollsystem der Form

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \\ u &\in \mathcal{U} = \{u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m \mid u(t) \in U \text{ für alle } t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Dabei sei $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ und wir betrachten etwa stückweise stetige zulässige Kontrollen u . Dabei verlangen wir, dass die Lösungen $\varphi(t, x_0, u)$ zu allen betrachteten Anfangswerten $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und Kontrollen u für alle $t \geq 0$ existieren.

Definition 4.20 Für eine Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^n$ betrachte $x, y \in V$. Der Punkt x kann asymptotisch in V nach y kontrolliert werden, falls $u \in \mathcal{U}$ existiert, so dass

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, x, u) = y \text{ und } \varphi(t, x, u) \in V \text{ für alle } t \geq 0.$$

Ist $V = \mathbb{R}^n$, so sagen wir auch, dass x asymptotisch nach y kontrollierbar ist.

Sei x^0 ein Gleichgewicht, also $0 = f(x^0, u^0)$ für ein $u^0 \in U$.

(i) Das System (4.9) heisst lokal asymptotisch kontrollierbar nach x^0 , falls für jede Umgebung V von x^0 eine Umgebung W von x^0 existiert, so dass jedes $x \in W$ in V asymptotisch nach x^0 kontrolliert werden kann;

(ii) das System (4.9) heisst global asymptotisch kontrollierbar nach x^0 , wenn es lokal asymptotisch nach x^0 kontrollierbar ist und jedes $x \in \mathbb{R}^n$ asymptotisch nach x^0 kontrolliert werden kann.

Die folgende Proposition charakterisiert Stabilisierbarkeit linearer Kontrollsysteme durch asymptotische Null-Kontrollierbarkeit.

Proposition 4.21 Für ein lineares Kontrollsystem $\dot{x} = Ax + Bu$ sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:

- (i) globale asymptotische Kontrollierbarkeit nach 0;
- (ii) lokale asymptotische Kontrollierbarkeit nach 0;
- (iii) jede Nullstelle des unkontrollierbaren Teils χ^u des charakteristischen Polynoms von A hat negativen Realteil;
- (iv) es gibt ein stabilisierendes Feedback F .

Beweis. Nach den Definitionen impliziert (i) die Eigenschaften (ii) und (iii). Ferner sind (iii) und (iv) nach dem Polverschiebungssatz äquivalent.

Um zu zeigen, dass (iv) die Eigenschaft (ii) impliziert, betrachte F , so dass $A + BF$ asymptotisch stabil ist. Für einen Anfangswert $x_0 \in \mathbb{R}^n$ bezeichne mit $x(t, x_0)$, $t \geq 0$, die Lösung des Anfangswertproblems $\dot{x} = (A + BF)x$, $x(0) = x_0$. Dann ist dies auch die Lösung des Anfangswertproblems $\dot{x} = Ax + Bu(t)$ mit $u(t) = Fx(t, x_0)$. Die asymptotische Stabilität von $\dot{x} = (A + BF)x$ impliziert dann die lokale asymptotische Kontrollierbarkeit nach 0.

Wir zeigen jetzt, dass (ii) die Eigenschaft (i) impliziert. Dies folgt aus der Linearität des Kontrollsystems: Wir müssen nur zeigen, dass jedes $x \in \mathbb{R}^n$ asymptotisch nach 0 kontrollierbar ist. Wegen der lokalen asymptotischen Null-Kontrollierbarkeit gibt es $\delta > 0$, so dass alle y mit $\|y\| \leq \delta$ asymptotisch nach 0 kontrolliert werden können. Definiere $y := x \cdot \delta / \|x\|$. Dann gibt es also eine Kontrolle u , so dass für die zugehörige Trajektorie $\varphi(t, y, u) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$ gilt.

Für $v := \|x\|/\delta$ impliziert die Linearität

$$\begin{aligned}\varphi(t, x, v) &= e^{At}x + \int_0^t e^{A(t-s)}Bv(s)ds \\ &= \|x\|/\delta \left[e^{At}x + \int_0^t e^{A(t-s)}Bv(s)ds \right] \rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass (i) die Eigenschaft (iii) impliziert. Es gibt (falls χ^u nichttrivial ist) eine Koordinatentransformation T mit

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} \text{ und } T^{-1}B = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und $\chi^u = \chi_{A_3}$. Sei $z_2 \in \mathbb{R}^{n-d}$, wobei d das Format von A_1 ist, und betrachte $x = T(0, z_2)^\top$. Wegen (i) gibt es eine Kontrolle u mit $x(t) = \varphi(t, x, u) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$, also auch

$$T^{-1}\varphi(t, x, u) \rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow \infty.$$

Mit

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} := T^{-1}\varphi(t, x, u)$$

gilt dann

$$\dot{z}_2(t) = A_3 z_2(t), \quad z_2(0) = z_2.$$

Weil z_2 beliebig gewählt war, ist A_3 asymptotisch stabil, also hat $\chi_{A_3} = \chi^u$ nur Nullstellen mit negativem Realteil. ■

4.6 Dynamische Beobachter und Stabilisatoren

Steht nicht der gesamte Zustand x für ein Feedback zur Verfügung, sondern nur ein Output $y = Cx$, so können die bisherigen Resultate zur Stabilisierung nicht angewendet werden. Stattdessen wird die Stabilisierung in zwei Schritten durchgeführt: Zunächst verschafft man sich aus dem Output eine Schätzung des Zustandes x , die man dann an Stelle des wirklichen Zustandes in das stabilisierende Feedback einsetzt.

Wir betrachten in diesem Abschnitt Systeme der Form

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx \tag{4.10}$$

und beginnen mit einem kontrollierbaren und beobachtbaren Beispiel, das zeigt, dass man nicht einfach den Output y für die Stabilisierung nutzen kann. Statisches Output-Feedback der Form

$$u = Fy = FCx$$

führt hier nicht zum Erfolg.

Beispiel 4.22 *Betrachte*

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad y = x_1$$

Mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $C = (1, 0)$ haben die Erreichbarkeitsmatrix

$$[B, AB] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und die Beobachtbarkeitsmatrix

$$[C^\top, A^\top C^\top] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

vollen Rang, das System ist also beobachtbar und kontrollierbar. Wir zeigen, dass kein stabilisierendes stetiges (auch kein nichtlineares) Feedback $k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ existiert. Wir zeigen also, dass

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= k(y) = k(x_1) \end{aligned}$$

nicht lokal asymptotisch stabil in 0 wird. In der Tat: Für ein stabilisierendes Feedback k betrachte

$$V(x_1, x_2) = x_2^2 - 2 \int_0^{x_1} k(s) ds.$$

Dann ist V ist konstant längs Trajektorien, weil

$$\frac{d}{dt} V(x_1(t), x_2(t)) = 2x_2\dot{x}_2 - 2k(x_1)\dot{x}_1 = 2\dot{x}_1\dot{x}_2 - 2\dot{x}_2\dot{x}_1 = 0.$$

Weil nach Annahme alle Trajektorien gegen 0 konvergieren und V stetig ist, muss $V(x_1, x_2) = V(0, 0) = 0$ sein. Dies ist ein Widerspruch zu

$$V(0, \alpha) = \alpha^2 \neq 0 \text{ für } \alpha \neq 0.$$

In vorangehenden Abschnitt ist der Begriff der asymptotischen (Null-)Kontrollierbarkeit von $\dot{x} = Ax + Bu$, also von Paaren (A, B) , eingeführt worden. Der folgende Begriff wird sich als dual dazu erweisen.

Definition 4.23 Ein Paar (A, C) heisst asymptotisch beobachtbar oder entdeckbar, falls gilt: Ist $\dot{x}(t) = Ax(t)$ und $Cx(t) = 0$ für alle $t \geq 0$, so ist $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

Asymptotische Beobachtbarkeit wird es uns erlauben, den Zustand des Systems aus den Beobachtungen zu schätzen, wie es für Stabilisierung nötig ist. Zunächst müssen wir diese Eigenschaft genauer analysieren.

Proposition 4.24 Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (i) Das System $\dot{x} = Ax$, $y = Cx$ ist asymptotisch beobachtbar.
- (ii) $\mathcal{N} = \bigcap_{i=1}^n \ker(CA^{i-1}) \subset \{x_0 \in \mathbb{R}^n, e^{At}x_0 \rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow \infty\}$.

Der Beweis ist Übungsaufgabe. Die folgende Proposition liefert die angekündigte Dualitätsaussage.

Proposition 4.25 Ein Paar (A, C) ist genau dann asymptotisch beobachtbar, wenn (A^\top, C^\top) asymptotisch kontrollierbar ist.

Beweis. Nach Koordinatentransformation erhält man

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad y = (0, C_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

mit beobachtbaren (A_2, C_2) . Sei zunächst (A, C) asymptotisch beobachtbar. Aus

$$0 = Cx(t) = (0, C_2) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = C_2 x_2(t) \quad \text{für } t \geq 0, \quad (4.11)$$

folgt dann $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$. Wegen der Beobachtbarkeit von (A_2, C_2) , impliziert (4.11), dass

$$x_2(0) = 0 \quad \text{für } t \geq 0$$

und daher

$$x_1(t) = e^{A_1 t} x_1(0) \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow \infty;$$

weil hierbei $x_1(0)$ beliebig ist, muss A_1 und daher auch A_1^\top stabil sein. Die Dualität von Kontrollierbarkeit und Beobachtbarkeit impliziert, dass (A_2^\top, C_2^\top) kontrollierbar ist. Nun ist

$$A^\top = \begin{pmatrix} A_1 & A_0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} A_1^\top & 0 \\ A_0^\top & A_2^\top \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C^\top = \begin{pmatrix} 0 \\ C_2^\top \end{pmatrix}.$$

Daher ist

$$(A^\top, C^\top) = \left(\begin{pmatrix} A_1^\top & 0 \\ A_0^\top & A_2^\top \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ C_2^\top \end{pmatrix} \right)$$

asymptotisch kontrollierbar. Die Umkehrung folgt genauso.

Asymptotische Beobachtbarkeit kann folgendermaßen interpretiert werden.

Für $\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx$ gelte $C\varphi(t, x_0, u) = C\varphi(t, x_1, u), t \geq 0$, also $Ce^{At}(x_0 - x_1) = 0, t \geq 0$. Asymptotische Beobachtbarkeit ist dann äquivalent zu $\varphi(t, x_0, u) - \varphi(t, x_1, u) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$.

Die folgende Definition beschreibt dynamische Beobachter oder Schätzer. Dieses Konzept wird es uns erlauben, mit Hilfe des Outputs den Zustand zu stabilisieren. Zunächst verschafft man sich eine Schätzung des Zustands.

Definition 4.26 Ein System der Form

$$\dot{z}(t) = Jz(t) + Ly(t) + Ku(t) \quad (4.12)$$

im Zustandsraum \mathbb{R}^n mit Inputraum $\mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^m$ heisst dynamischer Beobachter für (4.10), falls für alle Anfangswerte $x_0, z_0 \in \mathbb{R}^n$ und alle Kontrollen u gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - z(t)\| = 0$$

für die entsprechenden Lösungen von (4.10) und (4.12).

Dies Konzept ist *dynamisch*, weil es über eine Differentialgleichung konstruiert ist. Es liefert eine asymptotische Aussage für $t \rightarrow \infty$.

Proposition 4.27 *Das System (4.10) hat genau dann einen dynamischen Beobachter, wenn es asymptotisch beobachtbar ist.*

Beweis: *Das System (4.10) sei asymptotisch beobachtbar. Wir konstruieren einen dynamischen Beobachter der folgenden Form*

$$\dot{z}(t) = (A + LC)z(t) + Bu(t) - Ly(t) \quad (4.13)$$

Dann erfüllt der Fehler $e(t) = z(t) - x(t)$ die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{z}(t) - \dot{x}(t) \\ &= (A + LC)z(t) + Bu(t) - Ly(t) - Ax(t) - Bu(t) \\ &= (A + LC)z(t) - LCx(t) - Ax(t) \\ &= (A + LC)e(t). \end{aligned}$$

Ist also L so gewählt, dass $A + LC$ stabil ist, so folgt $e(t) \rightarrow 0$ (für alle Anfangswerte von z und x). Nach Voraussetzung ist (A, C) asymptotisch beobachtbar. Nach Proposition 4.25 ist daher (A^\top, C^\top) asymptotisch kontrollierbar. Es gibt daher ein Feedback F , so dass $A^\top + C^\top F$, also auch $A + F^\top C$ stabil ist. Also kann man $L = F^\top$ wählen (und $J = A + LC$).

Umgekehrt existiere ein dynamischer Beobachter. Für den Nachweis der asymptotischen Beobachtbarkeit betrachte $x(t)$, $t \geq 0$, mit

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad y(t) = Cx(t) = 0 \text{ für } t \geq 0.$$

Für $z_0 = 0$ und $u = 0$ ist dann

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= Jz(t) + Ly(t) + Ku(t) \\ &= Jz(t) + LCx(t) \\ &= Jz(t) \end{aligned}$$

und daher $z(t) = 0$ für $t \geq 0$. Also folgt

$$x(t) = x(t) - z(t) = -e(t) \rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow \infty.$$

Daher gilt asymptotische Beobachtbarkeit.

Wir werden jetzt einen dynamischen Beobachter mit einem (statischen) Feedback koppeln.

Definition 4.28 *Ein dynamischer Stabilisator für (4.10) ist ein dynamischer Beobachter der Form (4.12) zusammen mit einem Feedback F , so dass das gekoppelte System*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \quad y = Cx, \\ \dot{z} &= Jz + Ly + Ku, \quad u = Fz, \end{aligned}$$

asymptotisch stabil ist.

Wir verwenden also an Stelle des Zustandes $x(t)$ die Schätzung $z(t)$ im Feedback, und hoffen, dass für $t \rightarrow \infty$ Stabilisierung eintritt, weil sich dafür auch $z(t)$ und $x(t)$ annähern.

Theorem 4.29 *Das System (4.10) hat genau dann einen dynamischen Stabilisator, wenn es asymptotisch kontrollierbar und asymptotisch beobachtbar ist.*

Beweis: *Das System sei asymptotisch kontrollierbar und asymptotisch beobachtbar. Dann kann man F wählen, so dass $A+BF$ stabil ist. Nach Proposition 4.27 und ihrem Beweis findet man einen dynamischen Beobachter der Form*

$$\dot{z}(t) = (A + LC)z(t) + Bu(t) - Ly(t),$$

in dem L so gewählt wird, dass $A + LC$ stabil ist. Mit $u = Fz$ erhält man also das gekoppelte System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + BFz, \\ \dot{z} &= (A + LC)z + BFz - LCx.\end{aligned}$$

Wir müssen zeigen, dass dieses System asymptotisch stabil ist (also $J = A + LC$ und $K = B$). In der Tat:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A & BF \\ -LC & A + LC + BF \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \\ &= T^{-1} \begin{pmatrix} A + BF & BF \\ 0 & A + LC \end{pmatrix} T \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}\end{aligned}$$

mit

$$T = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{pmatrix} \text{ und } T^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ I & I \end{pmatrix}.$$

woraus asymptotische Stabilität folgt. Man rechnet nach:

$$\begin{aligned}& \begin{pmatrix} I & 0 \\ I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A + BF & BF \\ 0 & A + LC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A + BF & BF \\ A + BF & BF + A + LC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A & BF \\ -LC & A + LC + BF \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Umgekehrt, es existiere ein dynamischer Stabilisator. Dann folgt die asymptotische Kontrollierbarkeit mit $u(t) = Fz(t)$ (und beliebigem Anfangswert $z(0)$). Für die asymptotische Beobachtbarkeit betrachte

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \text{ mit } Cx(t) = 0 \text{ für } t \geq 0.$$

Definiere $z(t) = 0$ für $t \geq 0$. Dann ist $(x(t), z(t))$ eine Lösung des gekoppelten Systems und daher folgt $(x(t), z(t)) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$; insbesondere also $x(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$, wie gewünscht.

4.7 Kontrollierbarkeitsunterräume

In diesem Abschnitt werden wir die beiden Konzepte der Stabilisierung und Störungsentkopplung zusammen betrachten: Unser Ziel ist es, nicht nur einen Unterraum durch ein Feedback invariant zu machen, sondern gleichzeitig die Eigenwerte der Feedback-Matrix vorzugeben. Dazu benötigen wir zunächst das Konzept der Kontrollierbarkeitsunterräume.

Definition 4.30 Ein Unterraum $R \subset \mathbb{R}^n$ heißt Kontrollierbarkeitsunterraum (für (A, B)), wenn für jedes $x_0 \in R$ ein $T > 0$ und eine Input-Funktion u existieren, so dass $\varphi(t, x_0, u) \in R$ für alle $t \in [0, T]$ und $\varphi(T, x_0, u) = 0$.

Es ist unmittelbar klar, dass ein Kontrollierbarkeitsunterraum (A, B) -invariant ist, weil man für $t > T$ die Kontrolle $u(t) = 0$ wählen kann (dazu müssen wir bei der open-loop Charakterisierung von kontrollierter Invarianz auch stückweise (linksseitig) stetige Inputs zulassen; die Charakterisierung in Lemma 4.16 gilt auch dafür).

Lemma 4.31 (i) Die Summe von Kontrollierbarkeitsunterräumen ist ein Kontrollierbarkeitsunterraum.

(ii) Ist R ein Kontrollierbarkeitsunterraum für (A, B) , so auch für $(A + BF, BL)$ mit Feedback F und einem Isomorphismus L im Inputraum \mathbb{R}^m .

Beweis. (i) Durch Nachrechnen.

(ii) Sei $x_0 \in R$ und $\varphi(t, x_0, u) \in R$ für alle $t \in [0, T]$ und $\varphi(T, x_0, u) = 0$. Dann folgt mit $w(t) := -F\varphi(t, x_0, u) + L^{-1}u(t)$ und $x(0) = x_0$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A + BF)x + BLw(t) \\ &= Ax + BFx - BF\varphi(t, x_0, u) + Bu(t).\end{aligned}$$

Offenbar ist $\varphi(t, x_0, u)$ die (eindeutige) Lösung hiervon. ■

Im Weiteren wird die folgende Notation nützlich sein: Für ein Feedback F sei $A_F := A + BF$ und, für einen (A, B) -invarianten Unterraum V ist die Menge der Freunde von V

$$\underline{F}(V) := \{F \mid (A + BF)V \subset V\}.$$

Wir können Kontrollierbarkeitsunterräume folgendermaßen charakterisieren.

Theorem 4.32 Ein Unterraum R von \mathbb{R}^n ist genau dann ein Kontrollierbarkeitsunterraum, wenn es lineare Abbildungen F und L gibt, so dass

$$R = \langle A + BF \mid \text{Im } BL \rangle. \quad (4.14)$$

Beweis. Es gelte (4.14). Dann ist $A_F R \subset R$ und $\text{Im } BL \subset R$. Dann definiert

$$\dot{x} = A_F x + BLw$$

ein System in R , das wegen (4.14) kontrollierbar ist. Daher ist jeder Punkt in Zeit $T > 0$ nach 0 steuerbar, wobei die Lösung in R bleibt.

Sei R ein Kontrollierbarkeitsunterraum und $F \in \underline{F}(R)$, dann gilt also $(A + BF)R \subset R$ und es sei L eine lineare Abbildung, so dass $\text{Im } L = B^{-1}R := \{u \in \mathbb{R}^m \mid Lu \in R\}$. Wir behaupten, dass dann (4.14) gilt.

Sei $x_0 \in R$. Dann gibt es ein $T > 0$ und einen Input u , so dass $x(t) = \varphi(t, x_0, u) \in R$ für alle $t \in [0, T]$ und $\varphi(T, x_0, u) = 0$. Schreibe die Steuerung u als $u = Fx + v$, also

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BFx(t) + Bv(t) = A_F x(t) + Bv(t).$$

Wegen $x(t) \in R$ folgt $A_F x(t) \in R$ und $\dot{x}(t) \in R$ für $t \geq 0$, also $Bv(t) = \dot{x}(t) - A_F x(t) \in R$ für $t \geq 0$. Wegen $\text{Im } L = B^{-1}R$ gibt es $w(t)$ mit

$$\dot{x}(t) = A_F x(t) + BLw(t).$$

Man beachte, dass man wegen der Linearität von B die Steuerung w auf $[0, T]$ (stückweise) stetig wählen kann. Daher ist $\varphi(t, x_0, u)$ auch eine Lösung zu

$$\dot{x} = (A + BF)x + BLw(t).$$

Diese Gleichung können wir auch im Zustandsraum R betrachten. Dabei kann x_0 in R nach 0 gesteuert werden kann. Das System ist also vollständig kontrollierbar in R und daher $R = \langle A_F | \text{Im } BL \rangle$. ■

Aus diesem Beweis folgt, dass für einen Kontrollierbarkeitsunterraum R die Abbildungen $F \in \underline{F}(R)$ und L mit $\text{Im } L = B^{-1}R$ beliebig gewählt werden können. Weil hieraus insbesondere

$$\text{Im } BL = \text{Im } B \cap R$$

folgt (Übung!), erhalten wir das folgende Korollar.

Korollar 4.33 *Sei R ein Kontrollierbarkeitsunterraum. Dann ist für jedes $F \in \underline{F}(R)$*

$$R = \langle A + BF | \text{Im } B \cap R \rangle.$$

Ist W ein Unterraum von \mathbb{R}^n , so sind wir am größten Kontrollierbarkeitsunterraum interessiert, der in W enthalten ist.

Definition 4.34 *Sei W ein Unterraum von \mathbb{R}^n . Definiere*

$$R^*(W) := \left\{ x_0 \in \mathbb{R}^n \mid \begin{array}{l} \text{es gibt } u \text{ und } T > 0 \text{ mit } \varphi(t, x_0, u) \in W \\ \text{für } t \in [0, T] \text{ und } \varphi(T, x_0, u) = 0 \end{array} \right\}.$$

Natürlich ist $R^*(W) \subset W$.

Theorem 4.35 *Sei W ein Unterraum von \mathbb{R}^n . Dann ist $R^*(W)$ der größte Kontrollierbarkeitsunterraum in W , d.h.*

- (i) $R^*(W)$ ist Kontrollierbarkeitsunterraum;
- (ii) $R^*(W) \subset W$;
- (iii) ist $R \subset W$ ein Kontrollierbarkeitsunterraum, so folgt $R \subset R^*(W)$.

Beweis. (ii) ist klar. Wir zeigen zunächst, dass $R^*(W)$ ein Unterraum ist. Seien $x_0, x_1 \in R^*(W)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gibt es für $i = 0, 1$ Zeiten $T_i > 0$ und Inputs u_i mit

$$\varphi(t, x_i, u_i) \in W \text{ für } t \in [0, T_i] \text{ und } \varphi(T_i, x_i, u_i) = 0.$$

O.B.d.A. sei $T_0 \leq T_1$. Definiere einen neuen Input \tilde{u}_0 durch

$$\tilde{u}_0(t) = \begin{cases} u_0(t) & \text{für } t \in [0, T_0] \\ 0 & \text{für } t > T_0. \end{cases}$$

Dann ist $\varphi(T_1, x_0, \tilde{u}_0) = 0$ und $\varphi(t, x_0, \tilde{u}_0) \in W$ für $t \in [0, T_1]$. Definiere jetzt

$$u(t) := \alpha \tilde{u}_0(t) + \beta u_1(t), t \geq 0.$$

Es folgt

$$\varphi(t, \alpha x_0 + \beta x_1, u) \in W \text{ für } t \in [0, T_1] \text{ und } \varphi(T_1, \alpha x_0 + \beta x_1, u) = 0,$$

also ist $R^*(W)$ ein Unterraum. Jetzt zeigen wir, dass $R^*(W)$ ein Kontrollierbarkeitsunterraum ist. Sei $x_0 \in R^*(W)$. Dann gibt es also $T > 0$ und u mit $\varphi(t, x, u) \in W$ für $t \in [0, T]$ und $\varphi(T, x, u) = 0$. Wir müssen zeigen, dass $\varphi(t, x, u) \in R^*(W)$ für $t \in [0, T]$. Sei dazu $t_1 \in [0, T]$ und $x_1 := \varphi(t_1, x, u)$. Dann ist für $t \in [0, T - t_1]$, also $t + t_1 \in [t_1, T]$,

$$\varphi(t, x_1, u(t_1 + \cdot)) = \varphi(t, \varphi(t_1, x_0, u), u(t_1 + \cdot)) = \varphi(t + t_1, x_0, u) \in W.$$

Schließlich ist offenbar jeder Kontrollierbarkeitsunterraum, der in W enthalten ist, auch Teilmenge von $R^*(W)$. ■

In Analogie zum größten Kontrollierbarkeitsunterraum $R^*(W)$, der in W enthalten ist, wird der größte (A, B) -invariante Unterraum, der in W enthalten ist, auch mit $V^* = V^*(W) = \max \mathcal{J}(A, B; W)$ bezeichnet. Weil $R^*(W)$ auch (A, B) -invariant ist, folgt

$$R^*(W) \subset V^*(W) \subset W.$$

Es gilt daher sogar

$$R^*(V^*(W)) = R^*(W).$$

Wenn im Weiteren klar ist, welcher Unterraum W betrachtet wird, schreiben wir kurz $V^* = V^*(W)$ und $R^* = R^*(W)$.

Lemma 4.36 *Sei W ein Unterraum von \mathbb{R}^n . Dann ist*

$$\text{Im } B \cap V^*(W) \subset R^*(W).$$

Beweis. Sei L linear mit $\text{Im } L = B^{-1}V^*$, also $\text{Im } BL = \text{Im } B \cap V^*$. Wähle $F \in \underline{F}(V^*)$. Dann

$$\text{Im } B \cap V^* \subset \langle A_F \mid \text{Im } BL \rangle \subset V^* \subset W.$$

Weil $\langle A_F \mid \text{Im } BL \rangle$ nach Satz 4.32 ein Kontrollierbarkeitsunterraum ist, ist er in R^* enthalten. ■

Dies Lemma wird für das folgende stärkere Resultat verwendet.

Theorem 4.37 *Sei W ein Unterraum von \mathbb{R}^n . Dann ist $\underline{F}(V^*) \subset \underline{F}(R^*)$ und für $F \in \underline{F}(V^*)$ gilt*

$$R^* = \langle A + BF \mid \text{Im } B \cap V^* \rangle. \quad (4.15)$$

Beweis. Sei $F \in \underline{F}(V^*)$. Dann gilt $A_F R^* \subset A_F V^* \subset V^*$. Weil R^* (A, B) -invariant ist, ist R^* auch $(A + BF, B)$ -invariant, also $A_F R^* \subset R^* + \text{Im } B$. Zusammen mit Lemma 4.36 folgt

$$A_F R^* \subset (\text{Im } B + R^*) \cap V^* = (\text{Im } B \cap V^*) + R^* \subset R^*,$$

also ist $F \in \underline{F}(R^*)$. Nach Korollar 4.33 ist daher

$$R^* = \langle A + BF \mid \text{Im } B \cap R^* \rangle.$$

Ferner folgt nach Lemma 4.36 und wegen $R^* \subset V^*$, dass

$$\text{Im } B \cap V^* = \text{Im } B \cap R^*.$$

Daher gilt (4.15). ■

Durch Wahl von $F \in \underline{F}(V^*(W))$ und einer linearen Abbildung L mit $\text{Im } L = B^{-1}V^*$, erhalten wir ein neues System

$$\dot{x}(t) = (A + BF)x(t) + BLw(t)$$

mit Zustandsraum V^* . Dies System ist aus dem Originalsystem entstanden, indem wir die Lösungen (Trajektorien) auf V^* restringiert haben und die Inputs auf diejenigen mit Werten in $B^{-1}V^*$. Wegen $\text{Im } BL = \text{Im } B \cap V^*$ drückt (4.15) aus, dass R^* der Erreichbarkeitsunterraum dieses Systems ist.

Bemerkung 4.38 *Ist $V (= W)$ selber (A, B) -invariant, so ist $V = V^*$. Sei $R^* = R^*(V)$ der zugehörige größte Kontrollierbarkeitsunterraum in V . Dann besagt Theorem 4.37, dass für $F \in \underline{F}(V)$ und eine lineare Abbildung L mit $\text{Im } L = B^{-1}V$*

$$R^* = \langle A + BF \mid \text{Im } BL \rangle. \quad (4.16)$$

Bemerkung 4.39 *Aus Theorem 4.37 folgt, dass $R^*(\mathbb{R}^n)$, also der größte Kontrollierbarkeitsunterraum, gleich dem Erreichbarkeitsunterraum $\langle A \mid \text{Im } B \rangle$ ist. In der Tat, \mathbb{R}^n ist natürlich (A, B) -invariant, also $\mathbb{R}^n = V^*(\mathbb{R}^n)$ und jedes lineare F ist ein Freund von \mathbb{R}^n . Es folgt auch, dass jeder Kontrollierbarkeitsunterraum in $\langle A \mid \text{Im } B \rangle$ enthalten ist.*

4.8 Polverschiebung unter Invarianz

Wir haben oben diskutiert, welche Teil des Spektrums von A man durch Feedback verschieben kann. Außerdem haben wir kontrolliert invariante (d.h. (A, B) -invariante) Unterräume in einem gegebenen Unterraum charakterisiert, um den Output von Störungen zu entkoppeln. Jetzt kombinieren wir diese beiden Regelungsaufgaben und fragen:

Wieviel Freiheit bleibt für das Vorschreiben des Spektrums, wenn ein gegebener kontrolliert invarianter Unterraum invariant gemacht werden soll? Oder, konkreter gefragt: Gegeben ein kontrolliert invarianter Unterraum V , welche Freiheit haben wir, um das Spektrum von $A_F = A + BF$ vorzuschreiben, wenn wir uns auf Freunde $F \in \underline{F}(V)$ beschränken? Das folgende Theorem gibt eine vollständige Antwort darauf.

Theorem 4.40 *Betrachte $\dot{x} = Ax + Bu$. Es sei V ein kontrolliert invarianter Unterraum und $R := R^*(V)$ der größte Kontrollierbarkeitsunterraum in V . Ferner sei $S := V + \langle A \mid \text{Im } B \rangle$. Dann gilt:*

(i) $\underline{F}(V) \subset \underline{F}(R) \cap \underline{F}(S)$.

(ii) *Gegeben seien zwei normierte Polynome p_1 und p_2 mit $\deg p_1 = \dim R$ und $\deg p_2 = \dim S/V$. Dann existiert $F \in \underline{F}(V)$, so dass die charakteristischen Polynome von $A_{F|_R}$ und $A_{F|_{S/V}}$ gleich p_1 bzw. p_2 sind.*

(iii) *Die Abbildung $A_{F|_{V/R}}$ ist unabhängig von $F \in \underline{F}(V)$. Die Abbildung $A_{F|\mathbb{R}^n/S}$ ist gleich $A_{|\mathbb{R}^n/S}$ für alle $F \in \underline{F}(V)$.*

Bemerkung 4.41 *Bedingung (i) sagt, dass ein Feedback F , das V invariant macht, auch R und S invariant macht. Die Unterräume R, V , und S bilden eine aufsteigende Kette,*

$$0 \subset R \subset V \subset S \subset \mathbb{R}^n.$$

Zwischen 0 und R kann das Spektrum beliebig vorgegeben werden, ebenso zwischen V und S . Es ist fix zwischen R und V sowie zwischen S und \mathbb{R}^n .

Die obige Bemerkung können wir noch folgendermaßen reformulieren. Gegeben seien Polynome p_1 und p_2 wie in Theorem 4.40. Dann finden wir eine lineare Abbildung $F \in \underline{F}(V)$, so dass das charakteristische Polynom von $A + BF$ die Form

$$p_1 \cdot q \cdot p_2 \cdot r$$

hat, wobei q und r unabhängig von F sind. Hier ist q das charakteristische Polynom von $A_{F|V/R}$ und r das charakteristische Polynom von $A_{|\mathbb{R}^n/S}$.

Für ein gestörtes Kontrollsystem mit Output

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ew(t), \quad y(t) = Cx(t),$$

erhalten wir zusammen mit den Resultaten aus Abschnitt 4.3 das folgende Resultat über **Polverschiebung**: Definiere

$$W := \ker C, V := V^*(\ker C), R := R^*(\ker C), S := V + \langle A | \text{Im } B \rangle.$$

Dann sind q das charakteristische Polynom von $A_{F|V/R}$ und r das charakteristische Polynom von $A_{|\mathbb{R}^n/S}$. Ist $\text{Im } E \subset V := V^*(\ker C)$, so existiert für beliebige normierte Polynome p_1 und p_2 mit $\deg p_1 = \dim R$ und $\deg p_2 = \dim S/V$ ein Feedback F , so dass $A_F = A + BF$ das charakteristische Polynom

$$\chi_{A+BF} = p_1 \cdot q \cdot p_2 \cdot r$$

hat und das System störungsentkoppelt wird, d.h. $\int_0^t e^{A_F(t-s)} Ew(s) ds = 0$ für alle $t \geq 0$ und alle $w(\cdot)$.

Für den Beweis von Theorem 4.40 wird das folgende Lemma benötigt.

Lemma 4.42 *Sei V ein kontrolliert invarianter Unterraum und $F_0 \in \underline{F}(V)$. Ferner sei $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ linear. Es ist $F \in \underline{F}(V)$ genau dann, wenn $(F_0 - F)V \subset B^{-1}V$.*

Beweis. \implies : Sei $x_0 \in V$. Dann ist $(A + BF_0)x_0 \in V$ und $(A + BF)x_0 \in V$. Daher folgt $B(F_0 - F)x_0 \in V$.

\impliedby : Sei $x_0 \in V$. Dann ist $B(F_0 - F)x_0 \in V$. Ferner ist $(A + BF_0)x_0 \in V$. Es folgt, dass auch $(A + BF)x_0 = (A + BF_0)x_0 - B(F_0 - F)x_0 \in V$. ■

Wir beweisen jetzt Theorem 4.40.

Beweis. (i) Theorem 4.37 zeigt, dass $\underline{F}(V) \subset \underline{F}(R)$. Für jedes F ist der Unterraum S $A + BF$ -invariant (**Übungsaufgabe**).

(ii) Seien p_1, p_2 Polynome, wie im Theorem angegeben. Wir wählen $F_0 \in \underline{F}(V)$ und $L : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $\text{Im } L = B^{-1}V$, wobei $k := \dim B^{-1}V$. Nach (4.16) ist

$$R = \langle A + BF_0 | \text{Im } BL \rangle.$$

Definiere $A_0 := (A + BF_0)|_R$ und $B_0 := BL$. Dann ist das System (A_0, B_0) kontrollierbar und daher gibt es nach Theorem 4.9 ein $F_1 : R \rightarrow \mathbb{R}^k$, so dass $A_0 + B_0 F_1$ das charakteristische Polynom p_1 hat. Setze F_1 zu einer linearen Abbildung $F_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ fort und definiere $F_2 := F_0 + LF_1$. Weil $F_2 - F_0 = LF_1$

und $\text{Im } L = B^{-1}V$ ist, folgt aus Lemma 4.42, dass V invariant unter $A + BF_2$ ist. Daher ist S ein $(A + BF_2)$ -invarianter Unterraum.

Sei jetzt $\pi : S \rightarrow S/V$ die kanonische Projektion. Definiere die induzierten Abbildungen

$$A_2 := (A + BF_2)|_{S/V} \quad \text{und} \quad B_2 : \mathbb{R}^m \rightarrow S/V, B_2 := \pi \circ B.$$

Behauptung: Das System (A_2, B_2) ist kontrollierbar, d.h. $S/V = \langle A_2 \mid \text{Im } B_2 \rangle$.

Sei $\bar{x} = \pi(x) \in S/V$ mit $x \in S$. Dann kann man x schreiben als

$$x = x_1 + x_2, x_1 \in \langle A \mid \text{Im } B \rangle \quad \text{und} \quad x_2 \in V.$$

Weil $V = \ker \pi$, gilt dann $\bar{x} = \pi(x_1)$. Es gibt $u_0, \dots, u_{n-1} \in \mathbb{R}^m$, so dass

$$x_1 = \sum_i (A + BF_2)^i B u_i.$$

Daher

$$\bar{x} = \pi(x_1) = \sum_i \pi(A + BF_2)^i B u_i = \sum_i A_2^i B_2 u_i;$$

dabei haben wir benutzt, dass

$$\pi(A + BF_2) = A_2 \pi \quad \text{und} \quad B_2 = \pi B.$$

Dies beweist die **Behauptung**.

Nach Theorem 4.9 existiert $\bar{F}_3 : S/V \rightarrow \mathbb{R}^m$, so dass das charakteristische Polynom von $A_2 + B_2 \bar{F}_3$ gleich p_2 ist. Definiere

$$F_3 : S \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \text{durch} \quad F_3 := \bar{F}_3 \circ \pi \quad \text{und setze } F_3 \text{ fort auf } \mathbb{R}^n,$$

und definiere $F := F_2 + F_3$. Dann ist $F \in \underline{F}(V)$

$$(A + BF)V = (A + BF_2)V \subset V$$

(weil F_3 auf V verschwindet und V invariant ist unter $A + BF_2$). Ferner ist

$$(A + BF)|_{S/V} = A_2 + B_2 \bar{F}_3,$$

weil

$$(A_2 + B_2 \bar{F}_3)\pi = A_2 \pi + \pi B F_3 = \pi(A + BF_2) + \pi B F_3 = \pi(A + BF).$$

Daher ist das charakteristische Polynom von $(A + BF)|_{S/V}$ gleich p_2 . Es bleibt zu zeigen, dass das charakteristische Polynom von $(A + BF)|_R$ gleich p_1 ist. Dies folgt, weil

$$(A + BF)|_R = A_0 + B_0 F_1.$$

(iii) Seien $F_1, F_2 \in \underline{F}(V)$. Nach Lemma 4.42 gilt $(F_1 - F_2)V \subset B^{-1}V$. Daher ist $B(F_1 - F_2)V \subset V \cap \text{Im } B$. Sei $\pi_1 : V \rightarrow V/R$ die kanonische Projektion. Weil $R = \ker \pi_1$, folgt

$$\pi_1 B(F_1 - F_2)V = 0.$$

Bezeichne

$$A_1 := (A + BF_1)|_{V/R} \quad \text{und} \quad A_2 := (A + BF_2)|_{V/R}.$$

Sei $\bar{x} = \pi_1 x \in V/R$. Dann

$$\begin{aligned} (A_1 - A_2)\bar{x} &= (A_1\pi_1 - A_2\pi_1)x = [\pi_1(A + BF_1) - \pi_1(A + BF_2)]x \\ &= \pi_1 B(F_1 - F_2)x = 0. \end{aligned}$$

Daher ist $A_1 = A_2$ und deshalb ist die Abbildung $(A + BF)|_{V/R}$ unabhängig von F für $F \in \underline{F}(V)$.

Schließlich sei $\pi_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n/S$ die kanonische Projektion. Wegen $\text{Im } B \subset S$ und $S = \ker \pi_2$, gilt $\pi_2 B = 0$. Seien F_1, F_2 lineare Abbildungen von $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Beachte, dass S für $i = 1, 2$ ein $(A + BF_i)$ -invarianter Unterraum ist, und definiere

$$A_i := (A + BF_i)|_{\mathbb{R}^n/S}.$$

Sei $\bar{x} = \pi_2 x \in \mathbb{R}^n/S$. Dann

$$\begin{aligned} (A_1 - A_2)\bar{x} &= (A_1\pi_2 - A_2\pi_2)x = [\pi_2(A + BF_1) - \pi_2(A + BF_2)]x \\ &= \pi_2 B(F_1 - F_2)x = 0. \end{aligned}$$

Daher ist $A_1 = A_2$ und deshalb ist die Abbildung $(A + BF)|_{\mathbb{R}^n/S}$ unabhängig von F für $F \in \underline{F}(V)$. ■

Wir notieren schließlich die folgende Charakterisierung von Kontrollierbarkeitsunterräumen. Dabei verwenden wir, dass jeder Unterraum V von \mathbb{R}^n zu einem komplexen Unterraum $V_{\mathbb{C}}$ von \mathbb{C}^n erweitert werden kann, in dem man setzt:

$$V_{\mathbb{C}} := \{x + iy \mid x, y \in V\}.$$

Eine reelle Matrix definierte dann auch eine lineare Abbildung auf der komplexen Erweiterung. Wir werden auch für die komplexe Erweiterung einfach V schreiben, wenn aus dem Zusammenhang klar ist, was gemeint ist.

Theorem 4.43 *Für einen Unterraum V von \mathbb{R}^n sind äquivalent:*

- (i) V ist Kontrollierbarkeitsunterraum;
- (ii) für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ ist $(\lambda I - A)V + \text{Im } B = V + \text{Im } B$ (für die komplexen Erweiterungen);
- (iii) für jedes Monom p mit $\deg p = \dim V$ gibt es $F \in \underline{F}(V)$ so dass das charakteristische Polynom von $A_{F|V}$ gleich p ist.

Beweis. (i) \implies (iii) folgt durch Anwendung von Theorem 4.40 auf den Kontrollierbarkeitsunterraum V .

(iii) \implies (ii): Wegen $\underline{F}(V) \neq \emptyset$ ist V kontrolliert invariant, also $AV \subset V + \text{Im } B$ und daher $(\lambda I - A)V + \text{Im } B \subset V + \text{Im } B$. Für die umgekehrte Inklusion reicht es zu zeigen, dass $V \subset (\lambda I - A)V + \text{Im } B$. Wähle $\lambda \in \mathbb{C}$ und ein Monom p mit $\deg p = \dim V$ und $p(\lambda) \neq 0$. Dann gibt es $F \in \underline{F}(V)$ so dass das charakteristische Polynom von $A_{F|V} = p$ ist und $(\lambda I - A - BF)V \subset V$. Folglich ist λ kein Eigenwert von $(A + BF)|_V$, daher ist $(\lambda I - A - BF)|_V$, regulär, also $(\lambda I - A - BF)V = V$. Schließlich folgt $V \subset (\lambda I - A)V + \text{Im } B$.

(ii) \implies (i). Gilt (ii), so auch $AV \subset V + \text{Im } B$, also ist V kontrolliert invariant. Für jede lineare Abbildung F und jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt

$$(\lambda I - A - BF)V + \text{Im } B = V + \text{Im } B.$$

Nehmen wir hier $F \in \underline{F}(V)$ und schneiden mit V , so erhalten wir

$$(\lambda I - A - BF)V + (\text{Im } B \cap V) = V.$$

Sei L eine lineare Abbildung mit $\text{Im } L = B^{-1}V$, etwa $L : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$. Dann ist $\text{Im } B \cap V = \text{Im } BL$ und wir erhalten für alle $\lambda \in \mathbb{C}$

$$(\lambda I - A - BF)V + BL\mathbb{R}^k = V.$$

Nach dem Hautus-Kriterium folgt, dass das System $(A + BF, BL)$ mit Zustandsraum V und Inputraum \mathbb{R}^k kontrollierbar ist. Daher ist

$$V = \langle A + BF \mid \text{Im } BL \rangle.$$

Dann folgt die Behauptung aus der Charakterisierung von Kontrollierbarkeitsunterräumen in Theorem 4.32. ■

4.9 Stabilisierbarkeitsunterräume

Im vorangegangenen Abschnitt haben wir Kontrollierbarkeitsunterräume charakterisiert, die eine Verallgemeinerung des Erreichbarkeitsunterraums darstellen. Für Stabilisierbarkeit braucht man nicht, dass der Erreichbarkeitsunterraum gleich dem gesamten Zustandsraum ist, weil stabile Teile des Systems nicht mehr durch Feedback stabilisiert werden müssen. Analog führen wir jetzt Stabilisierbarkeitsunterräume ein, die es erlauben werden, den größten Teilraum eines gegebenen Unterraums zu charakterisieren, der stabilisiert werden kann.

Definition 4.44 *Ein Unterraum $V \subset \mathbb{R}^n$ ist ein Stabilisierbarkeitsunterraum, falls für jedes $x_0 \in V$ ein Input $u(\cdot)$ existiert, so dass $\varphi(t, x_0, u) \in V$ für alle $t \geq 0$ und $\varphi(t, x_0, u) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$.*

Offenbar ist jeder Stabilisierbarkeitsunterraum kontrolliert invariant, und jeder Kontrollierbarkeitsunterraum ist ein Stabilisierbarkeitsunterraum.

Theorem 4.45 *Sei V ein Unterraum von \mathbb{R}^n . Dann sind äquivalent:*

- (i) V ist ein Stabilisierbarkeitsunterraum;
- (ii) für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\text{Re } \lambda \geq 0$ ist $(\lambda I - A)V + \text{Im } B = V + \text{Im } B$ (für die komplexen Erweiterungen);
- (iii) es gibt $F \in \underline{F}(V)$ so dass das Spektrum von $A_F|_V$ in $\mathbb{C}_- := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \text{Re } \lambda < 0\}$ liegt.

Beweis. (iii) \implies (i): Sei $F \in \underline{F}(V)$ mit Spektrum von $(A_F)|_V$ in \mathbb{C}_- . Sei $A_0 := (A_F)|_V$ und wende das Feedback $u = Fx$ an. Die resultierende Trajektorie ist $x(t) = e^{A_0 t} x_0$. Für $x_0 \in V$ ist dann $x(t) \in V, t \geq 0$, und $x(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$.

(i) \implies (ii): Für jedes F ist (ii) äquivalent zu

$$(\lambda I - A_F)V + \text{Im } B = V + \text{Im } B \text{ für } \text{Re } \lambda \geq 0.$$

Sei $F \in \underline{F}(V)$. Dann ist dies äquivalent zu

$$(\lambda I - A_F)V + (\text{Im } B \cap V) = V \text{ für } \text{Re } \lambda \geq 0. \quad (4.17)$$

Dies folgt, in dem man den Schnitt mit V nimmt, die Umkehrung folgt sofort.

Jetzt nehmen wir an, dass (ii) nicht gilt, also muss es $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ geben mit $\text{Re } \lambda_0 \geq 0$, für das diese Gleichung nicht gilt. Weil $F \in \underline{F}(V)$ gilt

$$(\lambda_0 I - A_F)V + (\text{Im } B \cap V) \subset V.$$

Daher muss diese Inklusion strikt sein, d.h., es existiert $0 \neq \eta \in \mathbb{C}^n$ mit $\eta \perp (\lambda_0 I - A_F)V + (\text{Im } B \cap V)$, aber nicht $\eta \perp V$. Sei $x_0 \in V$ mit $\eta^* x_0 \neq 0$. Weil V ein Stabilisierbarkeitsunterraum ist, gibt es einen Input u so dass für die Lösung $\varphi(t, x_0, u)$ von

$$\dot{x}(t) = A_F x(t) + Bu(t), x(0) = x_0$$

gilt $\varphi(t, x_0, u) \in V$ für alle $t \geq 0$ und $\varphi(t, x_0, u) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$. Dann ist für alle $t \geq 0$ auch $\dot{x}(t) \in V$ und damit auch $A_F x(t) \in V$ für $t \geq 0$. Daher ist $Bu(t) \in \text{Im } B \cap V$ für $t \geq 0$ und daher $\eta^* Bu(t) = 0$.

Ferner gilt, weil $\eta \perp (\lambda_0 I - A_F)V$, gilt

$$\eta^*(\lambda_0 I - A_F)x(t) = 0, \text{ also } \eta^* A_F x(t) = \lambda_0 \eta^* x(t).$$

Definiere jetzt $z(t) := \eta^* x(t)$. Dann gilt (in \mathbb{C})

$$z(0) = \eta^* x_0 \neq 0 \text{ und } \dot{z}(t) = \eta^* \dot{x}(t) = \eta^* A_F x(t) - \eta^* Bu(t) = \lambda_0 \eta^* x(t) = \lambda_0 z(t).$$

Es folgt, dass

$$\eta^* x(t) = z(t) = e^{\lambda_0 t} \eta^* x_0.$$

Wegen $\text{Re } \lambda_0 \geq 0$ geht $z(t)$ nicht gegen 0 für $t \rightarrow \infty$, im Widerspruch zu $z(t) = \eta^* x(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$.

(ii) \implies (iii) Wegen (ii) gilt $AV \subset V + \text{Im } B$, also ist V kontrolliert invariant. Wähle $F_0 \in \underline{F}(V)$. Dann ist (ii) äquivalent zu (4.17) mit F_0 anstelle von F . Für $L : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ linear mit $\text{Im } B \cap V = \text{Im } BL$ liefert (4.17)

$$(\lambda I - A_{F_0})V + \text{Im } BL = V \text{ für } \text{Re } \lambda \geq 0.$$

Das Hautus-Kriterium impliziert, dass das System

$$(A_{F_0}, BL) \text{ auf } V$$

stabilisierbar ist. Daher gibt es $F_1 : V \rightarrow \mathbb{R}^k$, so dass die Eigenwerte von $(A_{F_0} + BLF_1)|_V$ in \mathbb{C}_- sind. Setze F_1 auf \mathbb{R}^n fort und definiere $F := F_0 + LF_1$. Dann ist das Spektrum von $(A_F)|_V$ in \mathbb{C}_- und wegen $\text{Im}(F - F_0) \subset B^{-1}V$ auch $F \in \underline{F}(V)$ nach Lemma 4.42. ■

Korollar 4.46 *Sei V ein kontrolliert invarianter Unterraum und R sei der größte Kontrollierbarkeitsunterraum in V . Der Unterraum V ist ein Stabilisierbarkeitsunterraum genau dann, wenn für jedes $F \in \underline{F}(V)$ das Spektrum von $(A + BF)|_{V/R}$ in \mathbb{C}_- enthalten ist.*

Beweis. In Theorem 4.40 haben wir gezeigt, dass die induzierte Abbildung $(A_F)|_{V/R}$ unabhängig von $F \in \underline{F}(V)$ ist. Ist V ein Stabilisierbarkeitsunterraum, so existiert $F \in \underline{F}(V)$, so dass das Spektrum $\sigma\left((A_F)|_V\right)$ von $(A_F)|_V$ in \mathbb{C}_- liegt. Weil für die Spektren gilt

$$\sigma\left((A_F)|_V\right) = \sigma\left((A_F)|_R\right) \cup \sigma\left((A_F)|_{V/R}\right),$$

folgt, dass der feste Teil des Spektrums von A_F , also $\sigma\left((A_F)|_{V/R}\right)$ in \mathbb{C}_- liegt.

Umgekehrt, ist V ein kontrolliert invarianter Unterraum, so dass für den festen Teil des Spektrums $\sigma\left((A_F)|_{V/R}\right) \subset \mathbb{C}_-$ gilt, so gibt es $F_1 \in \underline{F}(V)$ mit $\sigma\left((A_{F_1})|_V\right) \subset \mathbb{C}_-$, also ist V Stabilisierbarkeitsunterraum. ■

4.10 Störungsentkopplung mit Stabilität

In diesem Abschnitt lösen wir das Problem der Störungsentkopplung durch Zustandsfeedback mit Stabilität (**DDPS, Disturbance Decoupling with Stability**). Es hat die folgende Form:

Betrachte das gestörte Kontrollsystem mit Output

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ew(t), \quad y(t) = Cx(t).$$

Finde ein lineares Feedback $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit

(i) $Ce^{(A+BF)t}E = 0, t \geq 0,$

(ii) $\sigma(A + BF) \subset \mathbb{C}_-.$

Die Störungen $w(\cdot)$ sollen also keinen Einfluss auf den Output $y(\cdot)$ haben und das System soll stabil sein.

Gegeben ein Feedback, betrachte das closed-loop system

$$\dot{x}(t) = (A + BF)x(t) + Ew(t), \quad y(t) = Cx(t).$$

Nach den Resultaten aus Abschnitt 4.3 folgt, dass dieses System genau dann Störungsentkoppelt und stabil ist, wenn es einen A_F -invarianten Unterraum V zwischen $\text{Im } E$ und $\ker C$ gibt und A_F stabil ist. Ist ein Unterraum V A_F -invariant und ist A_F stabil, so ist V natürlich ein Stabilisierbarkeitsunterraum. Das folgende Resultat zeigt, dass auch die Umkehrung richtig ist.

Theorem 4.47 *Sei V ein Unterraum von \mathbb{R}^n . Es gibt ein Feedback $F \in \underline{F}(V)$, so dass $\sigma(A + BF) \subset \mathbb{C}_-$ genau dann, wenn V ein Stabilisierbarkeitsunterraum ist und (A, B) stabilisierbar ist.*

Beweis. \implies : Dies gilt mit den obigen Argumenten.

\impliedby : Sei $S := V + \langle A | \text{Im } B \rangle$ und $R := R^*(V)$. Aus Theorem 4.40 folgt, dass ein $F \in \underline{F}(V)$ existiert, so dass $\sigma((A_F)|_R) \subset \mathbb{C}_-$ und $\sigma((A_F)|_{S/V}) \subset \mathbb{C}_-$. Weil V ein Stabilisierbarkeitsunterraum ist, erhalten wir aus Korollar 4.46, dass $\sigma((A_F)|_{V/R}) \subset \mathbb{C}_-$. Weil (A, B) stabilisierbar ist, ist $\sigma(A|_{\mathbb{R}^n / \langle A | \text{Im } B \rangle}) \subset \mathbb{C}_-$. Ferner ist

$$\sigma(A|_{\mathbb{R}^n/S}) \subset \sigma(A|_{\mathbb{R}^n / \langle A | \text{Im } B \rangle}) \subset \mathbb{C}_-.$$

Jetzt folgt die Behauptung, weil

$$\sigma(A + BF) = \sigma((A_F)|_R) \cup \sigma((A_F)|_{V/R}) \cup \sigma((A_F)|_{S/V}) \cup \sigma(A|_{\mathbb{R}^n/S}) \subset \mathbb{C}_-.$$

■

Wir erhalten das folgende Resultat für das Störungsentkopplungsproblem mit Stabilität.

Theorem 4.48 *Das Störungsentkopplungsproblem mit Stabilität (DDPS) ist genau dann lösbar, d.h. es gibt eine lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, so dass $T := Ce^{(A+BF)t}E = 0, t \geq 0$, und $\sigma(A + BF) \subset \mathbb{C}_-$ genau dann, wenn (i) es einen Stabilisierbarkeitsunterraum V mit $\text{Im } E \subset V \subset \ker C$ gibt und (ii) das Paar (A, B) stabilisierbar ist.*

Beweis. \Rightarrow : Ist $T_F = 0$, so ist das System störungsentkoppelt. Daher gibt es einen A_F -invarianten Unterraum V mit $\text{Im } E \subset V \subset \ker C$. Weil $\sigma(A + BF) \subset \mathbb{C}_-$, ist V ein Stabilisierbarkeitsunterraum und (A, B) ist stabilisierbar.

\Leftarrow : Nach Theorem 4.47 gibt es ein F , so dass V A_F -invariant ist und $\sigma(A + BF) \subset \mathbb{C}_-$. Weil $\text{Im } E \subset V \subset \ker C$, ist das System störungsentkoppelt und daher $T_F = 0$. ■

Bemerkung 4.49 *In Analogie zu unseren Resultaten über Kontrollierbarkeitsunterräume gilt Folgendes: Für jeden Unterraum K gibt es einen größten Stabilisierbarkeitsunterraum in V gegeben durch*

$$V_-^*(K) := \{x \in K \mid \text{es gibt } u \text{ mit } \varphi(t, x_0, u) \in K \text{ und } \varphi(t, x_0, u) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0\}.$$

Betrachte den größten Kontrollierbarkeitsunterraum $R^(K)$ und den größten kontrolliert invarianten Unterraum $V^*(K)$ und einen Freund $F \in \underline{F}(V^*(K))$. Dann gilt*

$$V_-^*(K) = X_-(A + BF) \cap V^*(K) + R^*(K).$$

Für Beweise siehe Trentelmann, Stoorvogel, Hautus [16, Section 4.6].

Diese geometrische lineare Kontrolltheorie kann noch in viele Richtungen weiterentwickelt werden, indem man zum Beispiel zwischen Outputs unterscheidet, die messbar (oder beobachtbar) sind, und Outputs, die geregelt werden sollen, zum Beispiel stabil bleiben sollen. Dabei spielen, ähnlich wie bei Kontrollierbarkeit/Beobachtbarkeit, Dualitätsbeziehungen eine wichtige Rolle. Darstellungen dieser Theorie findet man in den Monographien Wonham [18], Basile und Marro [3], und Trentelmann, Stoorvogel, Hautus [16].

Kapitel 5

Optimale Steuerung: Das Linear-Quadratische Problem

In dem vorangegangenen Kapitel haben wir uns wenig um die Frage gekümmert, wie man stabilisierende Feedbacks berechnen kann. Jetzt werden wir eine Möglichkeit dazu kennenlernen, die auf Optimierung, genauer: Methoden der optimalen Steuerung, beruht.

5.1 Das Linear-Quadratische Problem und Stabilisierung

Wir betrachten ein lineares Kontrollsystem der Form

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Gesucht ist ein Feedback $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$, so dass für das closed-loop-System

$$\dot{x}(t) = (A + BF)x(t)$$

alle Trajektorien $\varphi(t, x_0, u)$ für $t \rightarrow \infty$ gegen 0 gehen. Dies gilt, falls $A + BF$ nur Eigenwerte mit negativem Realteil hat, weil dann Konstanten $\alpha > 0$, $C = C_\alpha > 0$ existieren, so dass für alle Trajektorien gilt

$$\|x(t, x_0)\| \leq C_\alpha e^{-\alpha t}, t \geq 0.$$

Dabei ist $\alpha > \max \operatorname{Re} \lambda_i$, wobei das Maximum über alle Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ von $A + BF$ genommen wird. Über die Konstante $C > 0$ sagen die Eigenwerte im Allgemeinen allerdings nichts aus. Betrachten wir das folgende asymptotisch stabile Beispiel mit doppeltem Eigenwert -1 :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + \gamma x_2, & x_1(0) &= x_1^0, \\ \dot{x}_2 &= -x_2, & x_2(0) &= x_2^0. \end{aligned}$$

Die Lösung ist

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = e^{-t} \begin{bmatrix} 1 & \gamma t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix} = e^{-t} \begin{bmatrix} x_1^0 + \gamma t x_2^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix},$$

weil

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{-t}(x_1^0 - \gamma t x_2^0) &= -e^{-t}(x_1^0 - \gamma t x_2^0) + e^{-t} \gamma x_2^0 = -x_1(t) + \gamma x_2(t) \\ \frac{d}{dt} e^{-t} x_2^0 &= -e^{-t} x_2^0 = -x_2(t). \end{aligned}$$

Für $\alpha > 1$ gehen die Lösungen gegen 0. Für $x_2^0 \neq 0$ wächst $x_1(t)$ zunächst in Abhängigkeit von γ .

Dies zeigt bereits, dass negative Realteile der Eigenwerte das gewünschte Verhalten von Lösungen noch nicht vollständig garantieren. Es sind offenbar noch mehr Informationen zu berücksichtigen.

Zunächst verallgemeinern wir die Problemstellung und betrachten Kontrollsysteme der folgenden Form:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ z(t) &= Cx(t) + Du(t). \end{aligned}$$

Hierbei ist $z \in \mathbb{R}^k$ der zu kontrollierende Output, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, und A, B, C, D sind Matrizen passender Dimension.

Wir betrachten hier Störungen, die zu einem Anfangszustand $x(0) = x_0 \neq 0$ führen, also durch einen „Impuls“ beschrieben werden können. Unser Ziel ist es, alle Komponenten des Outputs $z(t)$ so klein wie möglich zu machen. In der idealen Situation bleibt das unkontrollierte System ($u \equiv 0$) in der stationären Lösung $x \equiv 0$ und dann bleibt auch der Output $z \equiv 0$. Ist $x(0) = x_0$ so erhält man für das unkontrollierte System $z(t) = Ce^{At}x_0$. Für das kontrollierte System ergibt sich natürlich $z(t) = Cx(t) + Du(t)$. Um $z(t)$ für alle $t \geq 0$ (also auch für kleine t) möglichst nahe an 0 zu halten, minimieren wir über u

$$J_\infty(x_0; u) := \int_0^\infty [\|Cx(t)\|^2 + \|Du(t)\|^2] dt.$$

Allgemein erhalten wir das folgende **Linear-quadratische Problem (LQP)** $_0^\infty$:
Minimiere über u

$$J_\infty(x_0; u) = \int_0^\infty [x(t)^\top Qx(t) + u(t)^\top Nu(t)] dt$$

mit $x(\cdot)$ gegeben durch

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \geq 0, \quad x(0) = x_0;$$

hierbei die Matrizen sind $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $N \in \mathbb{R}^{m \times m}$ positiv-semidefinit bzw. positiv-definit, also $Q \geq 0$, $N > 0$

Wählt man speziell $N = I$, so kann man den Ausdruck

$$\int_0^\infty u(t)^\top u(t) dt = \int_0^\infty \|u(t)\|^2 dt$$

5.1. DAS LINEAR-QUADRATISCHE PROBLEM UND STABILISIERUNG 75

als minimale Energie der Steuerungen interpretieren; für $Q > 0$ sorgt der Summand

$$\int_0^\infty x(t)^\top Q x(t) dt$$

dafür, dass $x(t)$ gegen 0 geht für $t \rightarrow \infty$, weil der Integrand positiv ist für $x(t) \neq 0$. Will man nur, dass $Cx(t) \rightarrow 0$, so definiert man $Q := C^\top C$, und erhält

$$\|Cx(t)\|^2 = x(t)^\top C^\top C x(t) = x(t)^\top Q x(t).$$

Wichtig für die Nützlichkeit dieses Ansatzes über optimale Steuerung ist es, die optimale Steuerung in Feedbackform, also $u = Fx$, dazustellen.

Wir bemerken noch, dass man aus jeder positiv-definiten Matrix N die (positiv-definite) Wurzel ziehen kann,

$$N = N^{1/2} N^{1/2} \text{ mit } N > 0.$$

Dies kann man zum Beispiel sehen, wenn man N diagonalisiert, also $N = TDT^{-1}$ mit einer Diagonalmatrix $D = \text{diag}[d_1, \dots, d_n]$. Weil dann alle $d_i > 0$ sind, folgt mit $N^{1/2} := T \text{diag}[d_1^{1/2}, \dots, d_n^{1/2}] T^{-1}$, dass

$$N^{1/2} N^{1/2} = T \text{diag}[d_1^{1/2}, \dots, d_n^{1/2}] T^{-1} T \text{diag}[d_1^{1/2}, \dots, d_n^{1/2}] T^{-1} = TDT^{-1}.$$

Daher ist

$$u(t)^\top N u(t) = u(t)^\top N^{1/2} N^{1/2} u(t) = \left\| N^{1/2} u(t) \right\|^2.$$

Dies definiert eine gewichtete Norm $\|u\|' := \|N^{1/2} u\|$, $u \in \mathbb{R}^m$ im Kontrollraum. Daher können wir o.B.d.A. $N = I$ annehmen.

Eine wichtige Anwendung ist das Tracking-Problem. Hierbei verlangt man von dem Kontrollsystem, dass der Zustandsverlauf einer vorgegebenen Funktion, einem Referenzsignal $r(t)$, folgt. Als Beispiel betrachten wir ein skalares Kontrollsystem, dessen Output einer Sinus-Funktion folgen soll.

$$\dot{x}_1(t) = a_{11} x_1(t) + b_1 u(t), \quad z_1(t) = x_1(t).$$

Das Referenzsignal sei $r(t) = \sin \omega t$. Dieses Signal kann durch das Hilffsystem

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) &= x_3(t), \\ \dot{x}_3(t) &= -\omega^2 x_2(t), \\ r(t) &= x_2(t), \end{aligned}$$

mit Anfangsbedingung $x_2(0) = 0, x_3(0) = \omega$ erzeugt werden. Der Tracking-Fehler ist $z_1(t) - r(t)$.

Das *aggregierte System* ist dann gegeben durch

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \quad z(t) = [1, -1, 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Hier erhält man also $z(t) = x_2(t) - x_3(t)$. Hier kann man zusätzlich verlangen, dass nicht nur $\|z(t)\|^2$ klein wird, sondern auch die Kontroll-Energie $\|u(t)\|^2$. In der Tat wird das Problem (LQP) sehr viel schwieriger, wenn die Matrix N singulär ist. Deswegen ist dies auch mathematisch hilfreich.

5.2 Das Problem mit endlichem Horizont

In diesem Abschnitt diskutieren wir das folgende linear-quadratische Problem auf endlichem Zeitintervall.

Linear-quadratisches Problem (LQP)₀^T:

Minimiere über stückweise stetige Funktionen $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ das Integral

$$J_T(x_0, u) = \int_0^T [x(t)^\top Qx(t) + u(t)^\top u(t)] dt + x(T)^\top Nx(T)$$

über

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \geq 0, \quad x(0) = x_0;$$

hierbei seien die Matrizen $Q, N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ positiv-semidefinit, also $Q \geq 0, N \geq 0$.

Wir machen den folgenden **Ansatz**, weil wir vermuten, dass die optimale Lösung eine quadratische Funktion $x_0^\top Kx_0$ in x_0 ist:

Sei $K(t), t \geq 0$, eine stetig differenzierbare Funktion mit Werten $K(t)$, die symmetrische $n \times n$ -Matrizen $K(t)$ sind. Betrachte für zulässige Inputs u mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} & J_T(x_0, u) - x_0^\top K(0)x_0 \\ &= \int_0^T [x(t)^\top Qx(t) + u(t)^\top u(t)] dt + x(T)^\top K(T)x(T) - x_0^\top K(0)x_0 \\ &= \int_0^T \left[x(t)^\top Qx(t) + u(t)^\top u(t) + \frac{d}{dt} [x(t)^\top K(t)x(t)] \right] dt + x(T)^\top [N - K(T)]x(T). \end{aligned}$$

Für den Integranden erhält man nach der Kettenregel und unter Benutzung der Differentialgleichung und der Symmetrie von $K(t)$ (für das dritte „=“)

$$\begin{aligned} & x^\top Qx + u^\top u + \frac{d}{dt} [x^\top Kx] \\ &= x^\top Qx + u^\top u + \dot{x}^\top Kx + x^\top \dot{K}x + x^\top K\dot{x} \\ &= x^\top Qx + u^\top u + (u^\top B^\top + x^\top A^\top)Kx + x^\top \dot{K}x + x^\top K(Ax + Bu) \\ &= x^\top [Q + A^\top K + KA + \dot{K}]x + 2u^\top B^\top Kx + u^\top u \\ &= x^\top KBB^\top Kx + 2u^\top B^\top Kx + u^\top u + x^\top Sx \\ &= \|u + B^\top Kx\|^2 + x^\top Sx \end{aligned}$$

mit

$$S := \dot{K} + A^\top K + KA - KBB^\top K + Q.$$

Hierbei haben wir das Quadrat vervollständigt und erhalten

$$\begin{aligned} & J_T(x_0, u) \\ &= x_0^\top K(0)x_0 + \int_0^T [x(t)^\top S(t)x(t) + \|u(t) + B^\top K(t)x(t)\|^2] dt \\ & \quad + x(T)^\top [N - K(T)]x(T). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Idee: Finde $K(t)$, so dass $S(t) \equiv 0$ und $K(T) = N$. Dann

$$J_T(x_0, u) = x_0^\top K(0)x_0 + \int_0^T \|u(t) + B^\top K(t)x(t)\|^2 dt$$

und

$$J_T(x_0, u) \geq x_0^\top K(0)x_0$$

und = gilt genau dann, wenn $u(t) = -B^\top K(t)x(t), t \in [0, T]$. Wir erhalten das folgende Theorem.

Theorem 5.1 Sei $K : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ stetig differenzierbar mit $K(t) = K(t)^\top$ für alle t und Lösung der Riccati-Differentialgleichung

$$\dot{K}(t) = -A^\top K(t) - K(t)A + K(t)BB^\top K(t) - Q \quad (5.2)$$

mit Endbedingung $K(T) = N$. Dann erfüllt für jeden Anfangszustand $x_0 \in \mathbb{R}^n$ der optimale Wert

$$J_T^*(x_0) := \inf\{J_T(x_0, u) \mid u \text{ stückweise stetig}\} = x_0^\top K(0)x_0.$$

Insbesondere ist $K(0) \geq 0$. Ferner ist für gegebenes x_0 eine Steuerung u^* optimal genau dann, wenn

$$u^*(t) = -B^\top K(t)x(t), t \in [0, T].$$

Beweis. Zum Beweis müssen wir nur noch beachten, dass $J_T(x_0, u) \geq 0$ für alle x_0 und alle Steuerungen u . Insbesondere ist also $x_0^\top K(0)x_0 \geq 0$, also ist $K(t)$ positiv semidefinit. ■

Wenn wir solch ein K finden können, so erhalten wir eine optimale Steuerung mit einem *zeitvarianten Feedback*. Ferner können wir für einen gegebenen Anfangszustand x_0 eine open-loop (also zeitabhängige) Steuerung finden, wenn wir $u(t)$ in die Differentialgleichung schreiben: Wir erhalten die nichtautonome, lineare Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = [A - BB^\top K(t)]x(t), x(0) = x_0.$$

Hierzu existiert eine eindeutige Lösung $\xi(t)$ auf jedem Zeitintervall. Setzt man dies in die Formel für $u(t)$ ein, so ergibt sich die open-loop Steuerung

$$u(t) = -B^\top K(t)\xi(t).$$

Daher gibt es für jeden Anfangszustand x_0 einen eindeutigen optimalen Input. Wir haben das Problem $(\text{LQP})_0^T$ also gelöst, wenn die Riccati-Gleichung gelöst ist.

Bekanntermaßen haben solche Gleichungen nicht immer globale Lösungen. Zum Beispiel hat

$$\dot{x} = x^2 + 1$$

die allgemeine Lösung $x(t) = \tan(t + c), c \in \mathbb{R}$. Jede Lösung existiert nur auf einem Intervall der Länge π .

Die allgemeine Theorie von Differentialgleichungen liefert nur die Existenz von Lösungen auf einem Intervall um den Anfangszeitpunkt.

Theorem 5.2 Sei $T > 0, x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $f : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar.

- (i) Es gibt $T_1 \leq T$, so dass eine eindeutige Lösung auf $[0, T_1)$ existiert.
- (ii) Gibt es $C > 0$, so dass die Lösung auf jedem Intervall $[0, T_1)$, auf dem sie existiert, durch C beschränkt ist, so existiert die Lösung auf $[0, T]$.

Wir wenden dies Theorem auf die Riccati-Gleichung mit umgekehrter Zeit an. Daher existiert eine eindeutige Lösung $K(t) = K(t, T)$ von

$$\dot{K}(t) = -A^\top K(t) - K(t)A + K(t)BB^\top K(t) - Q, K(T) = N \quad (5.3)$$

auf einem Intervall $(T_1, T]$. Weil N und Q symmetrisch sind, erfüllt auch $K(t)^\top$ diese Differentialgleichung, wegen der Eindeutigkeit ist also auch $K(t, T)$ symmetrisch.

Theorem 5.3 *Die Riccati-Gleichung (5.3) hat für jedes symmetrische N eine eindeutige Lösung auf dem Intervall $[0, T]$. Diese Lösung ist symmetrisch und positiv semidefinit..*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass $K(t, T)$ auf jedem Existenzintervall gleichmäßig beschränkt ist. Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $K(t, T)$ existiere auf $(T_1, T]$. Wähle einen Input u identisch 0 auf $[0, T]$. Sei $t_0 \in (T_1, T]$. Wegen der Zeitinvarianz ist $L(t) := K(t + t_0, T)$ eine Lösung der Riccati-Gleichung auf $[0, T - t_0]$. Daher ist nach Theorem 5.1 $x_0^\top L(0)x_0$ das Minimum von $J_{T-t_0}(x_0, u)$ über alle u . Insbesondere ist wegen $L(0) = K(t_0, T)$

$$x_0^\top K(t_0, T)x_0 = x_0^\top L(0)x_0 \leq J_{T-t_0}(x_0, 0).$$

Daraus folgt auch, dass $K(t_0, T)$ positiv semidefinit ist. Ferner

$$\begin{aligned} J_{T-t_0}(x_0, 0) &= \int_0^{T-t_0} x_0^\top e^{A^\top t} Q e^{At} x_0 dt + x_0^\top e^{A^\top (T-t_0)} N e^{A(T-t_0)} x_0 \\ &\leq \int_0^T x_0^\top e^{A^\top t} Q e^{At} x_0 dt + x_0^\top e^{A^\top (T-t_0)} N e^{A(T-t_0)} x_0. \end{aligned}$$

Nun ist $t \mapsto x_0^\top e^{A^\top (T-t_0)} Q e^{A(T-t_0)} x_0$ eine stetige Funktion auf dem kompakten Intervall $[0, T]$, also beschränkt, etwa durch $M > 0$. Daher ist $x_0^\top K(t_0, T)x_0$ nach oben durch eine Konstante $C > 0$ beschränkt, unabhängig von t_0 und von T_1 . Daher ist auch $\|K(t, T)\|$ beschränkt, weil wegen der Symmetrie

$$\|K(t, T)\| = \max \{x^\top K(t, T)x \mid \|x\| = 1\}.$$

und für $\|x_0\| = 1$

$$\begin{aligned} \int_0^T x_0^\top e^{A^\top t} Q e^{At} x_0 dt &\leq \int_0^T \|e^{A^\top t} Q e^{At}\| dt. \\ x_0^\top e^{A^\top (T-t_0)} N e^{A(T-t_0)} x_0 &\leq \|e^{A^\top (T-t_0)} N e^{A(T-t_0)}\|. \end{aligned}$$

Aus Theorem 5.2 folgt jetzt die globale Existenz der Lösung. ■

Definiere

$$P(t) := K(T - t, T), t \in [0, T].$$

Dann erfüllt auch $P(t)$ die Riccati-Differentialgleichung, weil sie autonom ist, und es gilt $P(0) = K(T, T) = N$.

Wir erhalten das folgende Resultat.

Theorem 5.4 Betrachte $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, mit dem Kostenfunktional

$$J_T(x_0, u) := \int_0^T [x(t)^\top Qx(t) + u(t)^\top u(t)] dt + x(T)^\top Nx(T),$$

wobei $Q \geq 0$ und $N \geq 0$ sowie $T > 0$. Dann

(i) Die Riccati-Differentialgleichung

$$\dot{P}(t) = A^\top P(t) + P(t)A - P(t)BB^\top P(t) + Q, \quad P(0) = N \quad (5.4)$$

hat eine eindeutige Lösung auf $[0, \infty)$. Diese Lösung ist symmetrisch und positiv semidefinit für alle $t \geq 0$.

(ii) Für jedes x_0 gibt es genau eine optimale Inputfunktion u^* , stückweise stetig auf $[0, T]$ mit $J_T(x_0, u^*) = J_T^*(x_0)$. Dieses u^* ist erzeugt durch die zeitvariante Feedback-Steuerung

$$u(t) = -B^\top P(T-t)x(t), \quad t \in [0, T].$$

(iii) Ist $N = 0$, so ist $t \mapsto P(t)$ eine wachsende Funktion in dem Sinn, dass $P(t) - P(s)$ positiv semidefinit ist für $t \geq s$.

Beweis. Die Existenz der Lösung der Riccati-Differentialgleichung auf $(0, \infty)$ folgt, weil die (eindeutige) Lösung auf jedem Intervall $[0, T]$, $T > 0$, existiert. Die Positiv-Definitheit und die Monotonie sind Folgerungen aus der Tatsache, dass $P(t)$ diejenige Matrix ist, die die minimalen Kosten liefert. ■

Bemerkung 5.5 Es gilt noch eine weitere Monotonie-Beziehung: Wenn wir zwei optimale Steuerungsprobleme mit demselben System und derselbe Matrix Q und zwei Matrizen $N_1 \leq N_2$ betrachten, so gilt für jedes x_0 , dass die Funktion J_1 zu N_1 kleiner oder gleich der Funktion J_2 zu N_2 ist. Das gleiche gilt für die optimalen Kosten. Daher folgt $P_1(t) \leq P_2(t)$ für alle t .

5.3 Das Problem mit Unendlichem Horizont

Betrachte das Problem mit $N = 0$. Eine naheliegende Vermutung ist, dass $x_0^\top P(T)x_0$ für $T \rightarrow \infty$ gegen die minimalen Kosten des Problems auf $[0, \infty)$ konvergiert. Die Konvergenz von $x_0^\top P(T)x_0$ für alle x_0 ist äquivalent zur Konvergenz von $P(T)$ für $T \rightarrow \infty$ gegen eine Matrix P^- . Dies gilt aber nicht immer:

Betrachte zum Beispiel

$$\dot{x}(t) = 0 \text{ und } Q = 1.$$

Dann ist $\dot{P}(t) = 1, P(0) = 0$ mit Lösung $P(t) = t$, und $P(t)$ divergiert für $t \rightarrow \infty$. Dies ist auch zu erwarten, weil für $x(0) = x \neq 0$ das zu minimierende Integral

$$\int_0^\infty [x(t)^2 + u(t)^2] dt \geq \int_0^\infty c^2 dt = \infty$$

für alle Inputs u . Wir setzen daher voraus:

Annahme: Für jedes $x_0 \in \mathbb{R}^n$ gibt es einen Input u so dass

$$J(x_0, u) := \int_0^\infty [x(t)^\top Qx(t) + u(t)^\top u(t)] dt < \infty. \quad (5.5)$$

Eine Folgerung aus dieser Annahme ist, dass $P(T)$ für $T \rightarrow \infty$ konvergiert: In der Tat: Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und wähle u , so dass das Integral endlich ist. Dann gilt für jedes $T > 0$

$$x_0^\top P(T)x_0 \leq J_T(x_0, u) \leq J(x_0, u),$$

also ist $x_0^\top P(T)x_0$ beschränkt und daher ist $P(T)$ beschränkt. Weil $P(T)$ wachsend ist bezüglich T , folgt

$$P^- := \lim_{T \rightarrow \infty} P(T)$$

existiert. Weil P die Differentialgleichung

$$\dot{P}(t) = A^\top P(t) + P(t)A - P(t)BB^\top P(t) + Q$$

erfüllt, folgt, dass auch $\dot{P}(t)$ einen Limes für $t \rightarrow \infty$ besitzt. Dieser Limes ist gleich 0 (diese Aussagen sollen in einer **Übungsaufgabe** auf Blatt 10 bewiesen werden). Daher erfüllt $P := P^-$ die **algebraische Riccati-Gleichung (ARE)**

$$A^\top P + PA - PBB^\top P + Q = 0.$$

Die Lösungen hiervon sind die konstanten Lösungen, also die Gleichgewichte, der Riccati-Differentialgleichung. Daher ist auch P symmetrisch positiv semidefinit. Die Lösung muss nicht eindeutig sein, wir müssen daher die richtige Lösung auswählen und wir müssen für die zugehörige Kontrolle die Optimalität nachweisen.

Theorem 5.6 Für jedes $x_0 \in \mathbb{R}^n$ gebe es einen Input u , so dass $J(x_0, u) < \infty$. Dann gilt:

(i) $P^- := \lim_{T \rightarrow \infty} P(T)$ existiert, wobei $P(t)$ die Lösung der Riccati-Differentialgleichung mit $N = 0$ ist.

(ii) P^- ist die kleinste (reelle) symmetrische positiv-semidefinite Lösung von ARE. Daher gilt für jede symmetrische Lösung $P \geq 0$ von ARE, dass $P \geq P^-$.

(iii) Für jeden Input u gilt

$$J(x_0, u) = x_0^\top P^- x_0 + \int_0^\infty \|u(t) + B^\top P^- x(t)\|^2 dt.$$

(iv) Für jedes x_0 ist $J^*(x_0) := \inf\{J(x_0, u) \mid u \text{ ein Input}\} = x_0^\top P^- x_0$ und es gibt genau einen optimalen Input u^* mit $J^*(x_0) = J(x_0, u^*)$. Dieser optimale Input ist durch das Feedback-Gesetz

$$u(t) = -B^\top P^- x(t)$$

erzeugt.

Beweis. Bereits bewiesen ist, dass (i) gilt und P^- die ARE erfüllt. Für (ii) sei $P^* \geq 0$ eine Lösung von ARE. Dann ist P^* konstante Lösung der Riccati-DGL. Ferner ist $P(t)$ auch eine Lösung hiervon und $P(0) = 0 \leq P^*$. Daher ist $P(t) \leq P^*$ für alle $t \geq 0$ und daher $P^- = \lim_{t \rightarrow \infty} P(t) \leq P^*$ nach Bemerkung 5.5.

(iii) Verwende wieder Vervollständigung von Quadraten mit $K(t) = P(T-t)$, $N = 0$ und beliebigem u :

$$\begin{aligned} J_T(x_0, u) - x_0^\top K(0)x_0 &= \int_0^T \left[x(t)^\top Qx(t) + u(t)^\top u(t) + \frac{d}{dt} [x(t)^\top K(t)x(t)] \right] dt + x(T)^\top [N - K(T)]x(T). \end{aligned}$$

Für den Integranden erhält man

$$x^\top Qx + u^\top u + \frac{d}{dt} [x^\top Kx] = \|u + B^\top Kx\|^2 + x^\top Sx$$

mit

$$S := \dot{K} + A^\top K + KA - KBB^\top K + Q.$$

Hier ist $S \equiv 0$, $N = 0$ und $K(0) = P(T)$, $K(T) = P(0) = 0$, also

$$J_T(x_0, u) = x_0^\top P(T)x_0 + \int_0^T \|u(t) + B^\top P(T-t)x(t)\|^2 dt.$$

Zeige zunächst \geq : Wähle $T_0 > 0$. Dann gilt für $T > T_0$

$$\begin{aligned} & \int_0^T \|u(t) + B^\top P(T-t)x(t)\|^2 dt \\ & \geq \int_0^{T_0} \|u(t) + B^\top P(T-t)x(t)\|^2 dt \rightarrow \int_0^{T_0} \|u(t) + B^\top P^-x(t)\|^2 dt \end{aligned}$$

für $T \rightarrow \infty$. Also gilt für alle $T_0 > 0$

$$\underline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \|u(t) + B^\top P(T-t)x(t)\|^2 dt \geq \int_0^{T_0} \|u(t) + B^\top P^-x(t)\|^2 dt$$

Daher

$$\underline{\lim}_{T \rightarrow \infty} J_T(x_0, u) \geq x_0^\top P^-x_0 + \int_0^\infty \|u(t) + B^\top P^-x(t)\|^2 dt.$$

Umgekehrt, nehmen wir in der Formel der Vervollständigung von Quadraten, $K(t) = P^-$ und u beliebig und erhalten, wie gewünscht,

$$\begin{aligned} J_T(x_0, u) &= x_0^\top P^-x_0 + \int_0^T \|u(t) + B^\top P^-x(t)\|^2 dt \\ &\leq x_0^\top P^-x_0 + \int_0^\infty \|u(t) + B^\top P^-x(t)\|^2 dt. \end{aligned}$$

(iv) ist eine direkte Folgerung aus (iii). ■

Bemerkung 5.7 Aus dem obigen Beweis folgt, dass $x(T)^\top P^-x(T) \rightarrow 0$, falls $J(x_0, u) < \infty$ für ein geeignetes u . Insbesondere folgt $x(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$, falls P^- positiv definit ist.

Bemerkung 5.8 Man kann auch zeigen, dass genau dann für alle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ein Input u existiert mit $J(x_0, u) < \infty$, wenn die algebraische Riccati-Gleichung eine positiv semidefinite Lösung besitzt; siehe Trentelman, Stoorvogel, Hautus [16, Theorem 10.13].

Das folgende aktuelle Anwendungsbeispiel stammt von Hehn und D'Andrea [7].

Beispiel 5.9 Ein invertiertes Pendel soll stabilisiert werden, das auf einem fliegenden Quadrocopter befestigt ist. Der Quadrocopter hat sechs Freiheitsgrade: die drei räumlichen Richtungen und die drei Rotationsmöglichkeiten. Dies liefert ein 12-dimensionales System. Dazu kommt die Dynamik des Pendels, dessen Basispunkt fest auf dem Quadrocopter befestigt ist. Dies liefert zwei Freiheitsgrade für die Bewegung und daher ein vierdimensionales System. Das volle Gesamtsystem ist daher durch ein nichtlineares 16-dimensionales System von Differentialgleichungen beschrieben. Es wird angenommen, dass die Dynamik des Quadrocopters nicht durch die des Pendels beeinflusst wird (in dem Versuchsaufbau beträgt die Pendelmasse nur 5% der des Quadrocopters).

Die Drehung um x -Achse wird zum Beispiel beschrieben durch.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix}$$

Nach Vereinfachung erhält man ein 13-dimensionales System (3 Rotations- und sechs Translationszustände des Quadrocopters und vier Zustände des Pendels) und 4 Kontrollinputs (3 Drehmomente und die Gesamtbeschleunigung). Kritisch ist die Messung des Zustands: Die Drehmomente werden direkt im Quadrocopter gemessen, die Position und Translationsgeschwindigkeit durch Kameras, die in der Flughalle angebracht sind: „An infrared motion tracking system provides precise vehicle position and attitude measurements at 200Hz, using retro-reflective markers mounted to the vehicle. ... The inverted pendulum consists of a carbon fiber tube, measuring 1.15m in length. The top end of the pendulum carries a retro-reflective marker, allowing the position of this point to be determined through the motion tracking system in the same manner as vehicles are located.”

Zur Stabilisierung des instabilen Gleichgewichts wird linearisiert und dann linear-quadratische Steuerung auf unendlichem Zeitintervall verwendet.

5.4 Unendlicher Horizont mit Null-Endpunkt

In diesem Abschnitt betrachten wir das Problem mit der Bedingung $x(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$. Dies folgt ja nicht notwendigerweise aus $J^*(x_0) < \infty$ für alle x_0 , wenn Q nur positiv semi-definit ist. Ist Q positiv definit, $Q > 0$, so stimmt das in diesem Abschnitt betrachtete Problem also mit dem oben behandelten überein, und es ist nichts zu tun.

Bemerkung 5.10 Eine Motivation hierfür ist das Problem, den Output Cx zu minimieren, also $x(t)^\top C^\top C x(t)$ und $Q := C^\top C s > 0$; dann kann man zusätzlich fordern, dass $x(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$.

Wir nehmen im Folgenden an, dass (A, B) stabilisierbar ist.

Dann ist die Voraussetzung von Theorem 5.6 erfüllt und es gibt eine symmetrische Lösung P^- von (ARE). Sei jetzt P eine beliebige symmetrische Lösung von (ARE). Für $K(t) \equiv P$ und u mit $J(x_0, u) < \infty$ liefert die Vervollständigung des Quadrats (für das Problem mit $N = 0$)

$$J_T(x_0, u) = x_0^\top P x_0 + \int_0^T \|u(t) + B^\top P x(t)\|^2 dt - x(T)^\top P x(T).$$

Es folgt

$$J(x_0, u) = x_0^\top P x_0 + \int_0^\infty \|u(t) + B^\top P x(t)\|^2 dt \quad (5.6)$$

für jeden Input u mit $x(T) \rightarrow 0$ für $T \rightarrow \infty$. Den Optimalwert des **Problems mit Null-Endpunkt** bezeichnen wir mit

$$J_0^*(x_0) := \inf\{J(x_0, u) \mid u \text{ ein Input mit } \lim_{T \rightarrow \infty} x(T) = 0\}.$$

Dann gilt nach (5.6) für jede symmetrische Lösung P der ARE und jedes x_0

$$x_0^\top P x_0 \leq J_0^*(x_0).$$

Ferner folgt, dass für

$$u(t) = -B^\top P x(t), t \geq 0,$$

dass dies für jedes x_0 die optimale Lösung ist mit Optimalwert $x_0^\top P x_0$, falls $x(T, x_0) \rightarrow 0$ für $T \rightarrow \infty$.

Folglich gibt es höchstens eine symmetrische Lösung P der ARE, für die $A - BB^\top P$ stabil ist, und dass diese Matrix, wenn sie existiert, die maximale Lösung der ARE ist (ist $Q > 0$, so ist dies gleich der minimalen Lösung P^- und damit positiv definit, andernfalls ist P nur positiv semidefinit).

Wir betrachten zunächst den Spezialfall $Q = 0$, also

$$J(x_0, u) = \int_0^\infty \|u(t)\|^2 dt.$$

Ferner nehmen wir zunächst an, dass $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$. Die optimale Lösung (ohne Endbedingung) ist offenbar $u \equiv 0$. Im Fall der Null-Endbedingung ist $u \equiv 0$ nur dann optimal, wenn A bereits stabil ist.

Wir nehmen zunächst an, dass $\operatorname{Re} \lambda > 0$ für alle $\lambda \in \sigma(A)$, also $\sigma(-A) \subset \mathbb{C}_-$. Die vorausgesetzte Stabilisierbarkeit von (A, B) impliziert dann, dass (A, B) kontrollierbar ist. Die Riccati-Gleichung ist hier

$$A^\top P + PA - PBB^\top P = 0.$$

Wir behaupten, dass diese Gleichung eine symmetrische positiv definite Lösung P hat. Dies zeigen wir, indem wir für die Lyapunov-Gleichung

$$LA^\top + AL = BB^\top. \quad (5.7)$$

die Existenz einer positiv definiten Lösung L zeigen. Dann ist $P = L^{-1}$ eine Lösung der Riccati-Gleichung, weil Multiplikation von (5.7) von links und von rechts mit L^{-1} ergibt

$$L^{-1}LA^\top L^{-1} + L^{-1}ALL^{-1} - L^{-1}BB^\top L^{-1} = A^\top P + PA - PBB^\top P = 0.$$

Dazu definieren wir (ähnlich wie im Beweis von Theorem 3.15, man beachte, dass (5.7) äquivalent zu $L(-A^\top) + (-A)L = -BB^\top$ ist)

$$L := \int_0^\infty e^{-tA} BB^\top e^{-tA^\top} dt.$$

Das Integral konvergiert und L ist symmetrisch; ferner folgt aus der Kontrollierbarkeit

$$x^\top Lx = \int_0^\infty \|x^\top e^{-tA} B\|^2 dt > 0,$$

also ist $L > 0$. Ferner ist L Lösung von (5.7) und dann ist $P = L^{-1} > 0$.

Für die Feedback-Kontrolle $u(t) = -B^\top P x(t)$ ist die resultierende Zustandsgleichung

$$\dot{x}(t) = (A_P x(t)) \text{ mit } A_P := A - BB^\top P.$$

Die ARE kann mit A_P anstelle von A geschrieben werden als

$$\begin{aligned} & A_P^\top P + P A_P + P B B^\top P \\ &= (A^\top - P^\top B B^\top) P + P(A - B B^\top P) + P B B^\top P \\ &= A^\top P - P^\top B B^\top P + P A - P B B^\top P + P B B^\top P \\ &= A^\top P + P A - P B B^\top P = 0. \end{aligned}$$

Wir behaupten, dass A_P stabil ist. In der Tat, ist $\lambda \in \sigma(A_P)$, etwa $A_P v = \lambda v$ und $0 \neq v \in \mathbb{C}^n$, so folgt mit $v^* = \bar{v}^\top$

$$\begin{aligned} 0 &= v^* (A_P^\top P + P A_P + P B B^\top P) v = \bar{\lambda} v^* P v + v^* P \lambda v + v^* P B B^\top P v \\ &= 2(\operatorname{Re} \lambda) v^* P v + \|v^* P B\|^2, \end{aligned}$$

also

$$\operatorname{Re} \lambda = -\|v^* P B\|^2 / (2v^* P v).$$

Daher ist $\operatorname{Re} \lambda < 0$ wenn $v^* P B \neq 0$, andernfalls ist $\operatorname{Re} \lambda = 0$. In diesem Fall ist $B^\top P v = 0$ und damit

$$A v = A v + B B^\top P v = A_P v = \lambda v,$$

also λ Eigenwert von A auf der imaginären Achse, was wir ausgeschlossen haben.

Wir haben eine Lösung P der ARE gefunden, so dass das zugehörige Feedback $F := -B^\top P$ die Matrix A stabilisiert. Daher ist $u = Fx$ optimal.

Wir haben jetzt die beiden Spezialfälle $Q = 0, A$ stabil und $Q = 0, -A$ stabil gelöst. Jetzt nehmen wir weiterhin an, dass $Q = 0$ ist, aber dass A Eigenwerte auf beiden Seiten der imaginären Achse besitzt, aber **keine Eigenwerte auf der imaginären Achse**. Nach Zustandsraum-Transformation (also in geeigneten Koordinaten) ist

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

mit $\sigma(A_1) \subset \mathbb{C}_-$ und $\sigma(-A_2) \subset \mathbb{C}_-$. Wir suchen eine Lösung P der Riccati-Gleichung, für die $A - B B^\top P$ stabil ist. Solch eine Matrix kann in der Form

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}$$

gefunden werden, wobei P_2 die Lösung der ARE für A_2, B_2 ist: Dann erfüllt P die ARE für A, B , weil

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \\ & - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} [B_1^\top, B_2^\top] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_2^\top P + P_2 A_2 - P_2 B_2 B_2^\top P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} A - BB^\top P &= \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} [B_1, B_2] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} [B_1^\top, B_2^\top] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 - B_2 B_2^\top P_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ist stabil. Wir haben gesehen:

Wenn A keine Eigenwerte auf der imaginären Achse hat, so hat das Problem eine eindeutige Lösung, gegeben durch $u(t) = -B^\top P x(t)$, wobei P die eindeutige symmetrische Lösung der ARE ist, für die $A - BB^\top P$ stabil ist. Der minimale Wert des Integrals ist $x_0^\top P x_0$. Schließlich folgt aus der Optimalität, dass P die maximale symmetrische Lösung von ARE ist.

Wenn wir die Voraussetzung fallenlassen, dass $Q = 0$ ist, so können wir dies Problem auf den betrachteten Spezialfall reduzieren:

Wir führen die neue Kontrollvariable v durch

$$u = -B^\top P^- x + v$$

ein, wobei P^- die kleinste symmetrische Lösung der ARE ist. Dann wird die Differentialgleichung zu

$$\dot{x}(t) = A^- x(t) + v \text{ mit } A^- := A - BB^\top P^-.$$

Für das Zielfunktional ist (das vollständige Quadrat in (5.6) gilt für jede symmetrische Lösung von ARE)

$$J(x_0, u) = x_0^\top P^- x_0 + \int_0^\infty \|u(t) + B^\top P x(t)\|^2 dt = x_0^\top P^- x_0 + \int_0^\infty \|v(t)\|^2 dt.$$

Dies ist die Situation für $Q = 0$. **Hat A^- keine Eigenwerte auf der imaginären Achse**, so existiert eine Lösung $\Delta = \Delta^+$ der ARE

$$(A^-)^\top \Delta + \Delta A^- - \Delta BB^\top \Delta = 0, \quad (5.8)$$

für die $A^- - BB^\top \Delta^+$ stabil ist (Δ^+ ist die größte Lösung der ARE). Dann ist $v(t) = -B^\top \Delta^+ x(t)$ optimal.

Dies liefert, dass die Feedback-Kontrolle

$$u(t) := -B^\top P x(t) \text{ mit } P := P^- + \Delta^+$$

die optimale Steuerung des Originalproblems ist.

Dann erfüllt P die Original-ARE, weil

$$\begin{aligned}
& A^\top P + PA - PBB^\top P \\
&= A^\top (P^- + \Delta^+) + (P^- + \Delta^+)A - (P^- + \Delta^+)BB^\top (P^- + \Delta^+) \\
&= \underbrace{A^\top P^- + P^- A - P^- BB^\top P^-}_{-Q} + A^\top \Delta^+ + \Delta^+ A - P^- BB^\top \Delta^+ - \Delta^+ BB^\top P^- - \Delta^+ BB^\top \Delta^+ \\
&= -Q + (A - P^- BB^\top)^\top \Delta^+ + \Delta^+ (A P^- BB^\top) - \Delta^+ BB^\top \Delta^+ \\
&= -Q + (A^-)^\top \Delta^+ + \Delta^+ A^- - \Delta^+ BB^\top \Delta^+ = -Q,
\end{aligned}$$

und P ist die maximale Lösung und die eindeutige stabilisierende Lösung. Daher bezeichnen wir P mit P^+ .

Wir müssen noch die Bedingung, dass A^- keine Eigenwerte auf der imaginären Achse haben soll, mit Hilfe der Originaldaten A, B, Q ausdrücken. Das folgende Theorem zeigt insbesondere, dass dies gilt, wenn jeder Eigenwert von A auf der imaginären Achse (Q, A) -beobachtbar ist.

Theorem 5.11 *Betrachte $\dot{x} = Ax + Bu$ mit dem Kostenfunktional*

$$J(x_0, u) = \int_0^\infty [x(t)^\top Q x(t) + u(t)^\top u(t)] dt$$

mit $Q \geq 0$. Es sei (A, B) stabilisierbar und jeder Eigenwert von A auf der imaginären Achse sei durch Q beobachtbar, d.h. $\text{Rang} [i\omega I - A^\top, Q^\top] = n$ für alle $i\omega \in \sigma(A)$. Dann gilt:

(i) es existiert eine symmetrische Lösung P^+ der ARE $A^\top P + PA - PBB^\top P + Q = 0$ mit $\sigma(A - BB^\top P^+) \subset \mathbb{C}_-$.

(ii) Die Matrix P^+ ist die größte symmetrische Lösung der ARE, d.h., für jede symmetrische Lösung P der ARE gilt $P \leq P^+$, und P^+ ist positiv semidefinit.

(iii) Für jeden Anfangswert x_0 ist $J_0^*(x_0) = x_0^\top P^+ x_0$.

(iv) Für jedes x_0 gibt es genau einen optimalen Input, d.h. ein u^* mit $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ und $J(x_0, u^*) = J_0^*(x_0)$. In Feedbackform ist der optimale Input

$$u^*(t) = -B^\top P^+ x^*(t).$$

Beweis. Wir müssen nur noch zeigen, dass die Beobachtbarkeitsbedingung impliziert, dass $A^- := A - BB^\top P^-$ keine Eigenwerte auf der imaginären Achse hat.

Sei $i\alpha \in \sigma(A^-)$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$ und dass $v \in \mathbb{C}^n$ ein zugehöriger Eigenvektor ist. Die ARE ausgedrückt für A^- ist (aus (5.8))

$$0 = (A^-)^\top P + PA^- + P^- BB^\top P^- + Q.$$

Multiplikation von links mit v^* und von rechts mit v liefert

$$\begin{aligned}
0 &= v^* ((A^-)^\top P + PA^- + P^- BB^\top P^- + Q) v \\
&= v^* ((A^-)^\top P v + v^* P A^- v + v^* P^- BB^\top P^- v + v^* Q v) \\
&= -i\alpha v^* P v + v^* P i\alpha v + v^* P^- BB^\top P^- v + v^* Q v \\
&= v^* Q v + \|B^\top P^- v\|^2.
\end{aligned}$$

Dies impliziert $Qv = 0$. Daher ist

$$Av = i\alpha v \text{ und } Qv = 0, \text{ d.h., } v^*[\lambda I - A^\top, Q^\top] = 0,$$

also ist $i\alpha$ ein unbeobachtbarer Eigenwert von (Q, A) . ■

Bemerkung 5.12 Betrachte das Problem, den Output Cx zu minimieren, also $Q = C^\top C$. Aus dem letzten Beweisschritt folgt, dass dann $0 = v^*Qv = v^*C^\top Cv$, also $Cv = 0$, also ist $i\alpha$ auch unbeobachtbar für (C, A) . Es reicht hier also, zu verlangen, dass jeder Eigenwert von A auf der imaginären Achse (C, A) -beobachtbar ist.

Das folgende Beispiel zeigt, dass die Beobachtbarkeitsbedingung für die Eigenwerte auf der imaginären Achse auch notwendig ist für die Existenz von optimalen Kontrollen für alle Anfangszustände.

Beispiel 5.13 Sei

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = 0.$$

Die Eigenwerte i und $-i$ von A sind beide unbeobachtbar. Wähle den Input

$$u(t) := e^{t(A-\varepsilon I)}p, \quad p \in \mathbb{R}^2.$$

Die Variation-der-Parameter-Formel liefert

$$x(t) = e^{tA} + \int_0^t e^{(t-\tau)A}Bu(\tau)d\tau = e^{tA} \left[x_0 + \int_0^t e^{-\tau A}Bu(\tau)d\tau \right].$$

Daher gilt für $t \rightarrow \infty$

$$e^{-tA}x(t) = x_0 + \int_0^t e^{-\tau A}Be^{\tau(A-\varepsilon I)}pd\tau = x_0 + \frac{1}{-\varepsilon}(-p) \rightarrow x_0 + p/\varepsilon.$$

Weil e^{tA} eine orthogonale Matrix ist, folgt $x(t) \rightarrow 0$ falls $p = -\varepsilon x_0$. Ferner

$$\|u(t)\|^2 = e^{-2\varepsilon t}\varepsilon^2 \|x_0\|^2, \text{ also } \int_0^\infty \|u(t)\|^2 dt = \frac{\varepsilon}{2} \|x_0\|^2.$$

Es folgt $J_0^*(x_0) = 0$. Andererseits ist klar, dass es für $x_0 \neq 0$ kein u gibt mit $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$, für das dieses Infimum angenommen wird.

Bemerkung 5.14 Das linear-quadratische Problem ist ein spezielles Problem der optimalen Steuerung. Allgemein betrachtet man Probleme der folgenden Form Minimiere

$$J(x, u; t_0, x_0) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), u(t))dt + L_1(x(t_1))$$

über alle t_1 , $x(\cdot)$, $u(\cdot)$ mit

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t)) \text{ für } t \in [t_0, t_1], \quad x(t_0) = x_0, \\ \psi(t_1, x(t_1)) &= 0, \\ u(t) &\in U \text{ für } t \in [t_0, t_1]; \end{aligned}$$

hierbei sind $L : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $L_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ hinreichend oft differenzierbar und $U \subset \mathbb{R}^m$. Ferner ist $t_0 \in \mathbb{R}$ fest, aber $t_1 > t_0$ kann frei sein. Zulässige Kontrollen sind stückweise stetige Funktionen von $[t_0, t_1]$ nach \mathbb{R}^m , für die gilt: $u(t) \in U$ für alle $t \in [t_0, t_1]$ und die zugehörige Trajektorie $x(\cdot)$ erfüllt die Nebenbedingung $\psi(t_1, x(t_1)) = 0$. Die Funktion

$$V(t_0, x_0) = \inf\{J(x, u; t_0, x_0), u \text{ ist zulässig für } (P_{t_0, x_0})\}$$

heißt optimale Wertefunktion. Eine zulässige Kontrollfunktion u heißt optimal, falls $J(x, u; t_0, x_0) = V(t_0, x_0)$.

Im linear-quadratischen Fall haben wir gezeigt, dass die optimale Wertefunktion $V(x_0) = x_0^\top P(T)x_0$ durch die Lösung der Riccati-Differentialgleichung gegeben ist. Im Allgemeinen ist die optimale Wertefunktion die Lösung einer partiellen Differentialgleichung, der Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung.

Kapitel 6

H₂-Optimale Steuerung

In diesem Kapitel kehren wir zu dem Problem zurück, zeitabhängige Störungen, die auf das System wirken, zu unterdrücken. Dabei versuchen wir nicht, den Einfluss von Störungen auf den Output zu eliminieren, wie im (geometrischen) Störungsentkopplungs-Problem. Stattdessen versuchen wir, ihren Einfluss in einem geeigneten Sinn zu minimieren.

6.1 H₂-Optimale Steuerung mit Zustands-Feedback

Wir betrachten lineare Systeme (Σ) der folgenden Form

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Ed(t), \\ z(t) &= Cx(t) + Du(t).\end{aligned}\tag{6.1}$$

Die Lösungen für Anfangszustand $x(0) = x_0$ sind gegeben durch

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds + \int_0^t e^{A(t-s)}Ed(s)ds$$

Für ein Feedback $u = Fx$ erhält man

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A + BF)x(t) + Ed(t), \\ z(t) &= (C + DF)x(t),\end{aligned}$$

also mit $C_F := C + DF$, $A_F := A + BF$

$$\begin{aligned}z(t) &= (C + DF) \left[e^{(A+BF)t}x_0 + \int_0^t e^{(A+BF)(t-s)}Ed(s)ds \right] \\ &= C_F e^{A_F t}x_0 + \int_0^t C_F e^{A_F(t-s)}Ed(s)ds.\end{aligned}$$

Die Transfer-Funktion von den Störungen $d(\cdot)$ zum Output $z(\cdot)$ ist

$$T_F(t) = C_F e^{A_F t} E, t \geq 0.$$

Sie beschreibt den Einfluss der Störungen auf den Output, und sie soll in einer geeigneten Norm minimiert werden.

In der H_2 -optimalen Steuerung verwendet man die Frobenius-Norm für Matrizen $M \in \mathbb{R}^{k \times \ell}$

$$\|M\|^2 := \sum_{i,j} M_{ij}^2 = \text{Spur}(M^\top M).$$

Für ein stabilisierendes Feedback F , also $\sigma(A+BF) \subset \mathbb{C}_-$, betrachten wir dann

$$J_\Sigma(F) = \int_0^\infty \|T_F(t)\|^2 dt = \int_0^\infty \text{Spur} [T_F(t)^\top T_F(t)] dt < \infty. \quad (6.2)$$

Das H_2 optimale Steuerungsproblem mit Zustandsfeedback: Gegeben sei das Kontrollsystem (6.1) zusammen mit dem Kostenfunktional (6.2). Finde

$$J^* = \inf\{J_\Sigma(F) \mid F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ linear mit } \sigma(A_F) \subset \mathbb{C}_-\}$$

und ein optimales Zustandsfeedback F^* mit $\sigma(A_{F^*}) \subset \mathbb{C}_-$ und $J_\Sigma^* = J_\Sigma(F^*)$.

Standardannahme in diesem Kapitel ist, dass (A, B) stabilisierbar ist.

Vereinfachende Annahme: Das Problem ist **regulär, d.h.** D ist injektiv und in **Standardform**, d.h., $D^\top C = 0$ und $D^\top D = I_m$.

Bemerkung 6.1 Dies Problem trägt den Namen H_2 -optimale Steuerung, weil das Zielfunktional mit

$$G_F(s) := C_F(sI - A_F)^{-1}E$$

auch in der Form

$$J_\Sigma(F) = \int_{-\infty}^\infty \text{Spur} [G_F^\top(i\omega)G_F(i\omega)] d\omega$$

geschrieben werden kann. Die Funktion $G_F(s)$, $s \in \mathbb{C}_+$, wird also nur auf der imaginären Achse integriert. Diese Norm auf einem Raum komplexer Funktionen heißt H_2 -Norm (in dem Hardy-Raum H_2).

Wir werden dies Problem, ähnlich wie das linear-quadratische Problem, mit Hilfe der Vervollständigung von Quadraten und Riccati-Gleichungen lösen. Es sei P eine symmetrische Lösung der algebraischen Riccati-Gleichung

$$A^\top P + PA - PBB^\top P + C^\top C = 0. \quad (6.3)$$

Ferner sei F so, dass $\sigma(A_F) \subset \mathbb{C}_-$. Definiere

$$X(t) = e^{A_F t} E, U(t) = F e^{A_F t} E.$$

Dann

$$\frac{d}{dt} X(t) = \dot{X}(t) = A_F e^{A_F t} E = A e^{A_F t} E + B F e^{A_F t} E = AX(t) + BU(t), X(0) = E.$$

Wir berechnen unter Benutzung der Riccati-Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} X^\top P X &= \dot{X}^\top P X + X^\top P \dot{X} = (AX + BU)^\top P X + X^\top P (AX + BU) \\ &= X^\top (A^\top P + PA) X + U^\top B^\top P X + X^\top P B U \\ &= X^\top P B B^\top P X - X^\top C^\top C X + U^\top B^\top P X + X^\top P B U \\ &= (B^\top P X + U)^\top (B^\top P X + U) - (CX + DU)^\top (CX + DU), \end{aligned}$$

denn die letzte Zeile ist unter Benutzung der Regularitätsannahme $D^\top C = 0$ und $D^\top D = I$ gleich

$$\begin{aligned} & (X^\top PB + U^\top)(B^\top PX + U) - (X^\top C^\top + U^\top D^\top)(CX + DU) \\ &= X^\top PBB^\top PX + X^\top PB U + U^\top B^\top PX + U^\top U - X^\top C^\top CX - U^\top D^\top CX - U^\top D^\top DU \\ &= X^\top PBB^\top PX + X^\top PB U + U^\top B^\top PX - X^\top C^\top CX. \end{aligned}$$

Integration von 0 bis T liefert

$$\begin{aligned} X(T)^\top PX(T) - E^\top PE &= \int_0^T (B^\top PX(t) + U(t))^\top (B^\top PX(t) + U(t)) dt \\ &\quad - \int_0^T (CX(t) + DU(t))^\top (CX(t) + DU(t)) dt. \end{aligned}$$

Weil $\sigma(A_F) \subset \mathbb{C}_-$ gilt $X(T)^\top PX(T) \rightarrow 0$ für $T \rightarrow \infty$ und daher

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty (CX(t) + DU(t))^\top (CX(t) + DU(t)) dt \\ &= E^\top PE + \int_0^\infty (B^\top PX(t) + U(t))^\top (B^\top PX(t) + U(t)) dt. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Ferner gilt mit $C_F := C + DF$

$$CX(t) + DU(t) = Ce^{A_F t} E + DFe^{A_F t} E = C_F e^{A_F t} E = T_F(t)$$

und

$$B^\top PX(t) + U(t) = B^\top Pe^{A_F t} E + Fe^{A_F t} E = (B^\top P + F)e^{A_F t} E =: T_{P,F}(t).$$

Setzen wir dies in (6.4) ein und nehmen die Spur, so erhalten wir

$$\int_0^\infty \text{Spur} [T_F(t)^\top T_F(t)] dt = \text{Spur}[E^\top PE] + \int_0^\infty \text{Spur} [T_{P,F}(t)^\top T_{P,F}(t)] dt. \quad (6.5)$$

Wir erhalten $T_{P,F}(t)$ als Transfer-Funktion von den Störungen $d(\cdot)$ zum Output $z(\cdot)$ für das Feedback $u = Fx$ im Hilffsystem Σ_P gegeben durch

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Ed(t) \\ z(t) &= B^\top Px(t) + u(t). \end{aligned} \quad (6.6)$$

Dieses System erhält man aus dem Originalsystem, indem die Output-Gleichung $z = Cx + Du$ durch $z = B^\top Px + u$ ersetzt wird. Das zweite Integral in (6.5) ist gleich $J_{\Sigma_p}(F)$, also der Wert des Zielfunktionals, wenn das Zustandsfeedback $u(t) = Fx(t)$ in Σ_P verwendet wird. Wir erhalten das folgende Resultat.

Lemma 6.2 *Betrachte das System Σ gegeben durch (6.1). Es gelte $D^\top C = 0$, $D^\top D = I$ und (A, B) sei stabilisierbar. Es sei P eine symmetrische Lösung der ARE (6.3). Ein Zustandsfeedback $u(t) = Fx(t)$ ist stabilisierend für Σ genau dann, wenn es stabilisierend für das System Σ_P ist. Für solch ein F gilt*

$$J_\Sigma(F) = \text{Spur}[E^\top PE] + J_{\Sigma_p}(F).$$

Insbesondere folgt $J_\Sigma(F) \geq \text{Spur}[E^\top PE]$ für jede symmetrische Lösung P der ARE.

Weil $\text{Spur}[E^\top P E]$ unabhängig von F ist, können wir das Originalproblem ersetzen durch die Minimierung des Kostenfunktional für Σ_P gegeben durch

$$J_{\Sigma_P}(F) = \int_0^\infty \text{Spur} [T_{P,F}(t)^\top T_{P,F}(t)] dt \text{ mit } T_{P,F}(t) = (B^\top P + F)e^{A_F t} E.$$

Ein erster Versuch zur Minimierung ist die Wahl $F = -B^\top P$, die $T_{P,F}(t) \equiv 0$ und damit $J_{\Sigma_P}(F) = 0$ liefert. Hierfür wird jedoch i.A. nicht gelten, dass $\sigma(A_F) \subset \mathbb{C}_-$. Wir können aber anstelle einer beliebigen symmetrischen Lösung P der ARE die maximale symmetrische Lösung nehmen und erhalten das folgende Resultat.

Theorem 6.3 *Betrachte das System Σ gegeben durch (6.1). Es gelte $D^\top C = 0$, $D^\top D = I$. Ferner sei (A, B) stabilisierbar und jeder Eigenwert von A auf der imaginären Achse sei (C, A) -beobachtbar. Schließlich sei P^+ die größte symmetrische Lösung der ARE (6.3). Dann gilt:*

- (i) *Der Optimalwert erfüllt $J_\Sigma^* = \text{Spur}(E^\top P^+ E)$.*
- (ii) *Das Feedback $u(t) = -B^\top P^+ x(t)$ ist optimal, d.h.*

$$J_\Sigma^* = J_\Sigma(-B^\top P^+) \text{ und } \sigma(A - BB^\top P^+) \subset \mathbb{C}_-.$$

Beweis. Weil jeder Eigenwert von A auf der imaginären Achse (C, A) -beobachtbar ist, zeigen Theorem 5.11 und Bemerkung 5.12, dass die größte symmetrische Lösung P^+ der ARE existiert und $\sigma(A - BB^\top P^+) \subset \mathbb{C}_-$ erfüllt. Nach Lemma 6.2 gilt für jede symmetrische Lösung, also insbesondere für P^+ , und $F = -B^\top P^+$, dass $T_{P,F}(t) = 0$ für alle t . Dann ist der Optimalwert $J_{\Sigma_P}^*$

$$J_{\Sigma_P}^* = \int_0^\infty \text{Spur} [T_{P,F}(t)^\top T_{P,F}(t)] dt = 0.$$

Dann ist nach (6.5) der Optimalwert des Ausgangsproblems

$$J_\Sigma^* = \text{Spur}[E^\top P E] + J_{\Sigma_P}^* = \text{Spur}[E^\top P E] + J_\Sigma(-B^\top P^+) = \text{Spur}[E^\top P E],$$

also ist $F = -B^\top P^+$ auch optimal hierfür. ■

Das folgende Beispiel zeigt, dass ein optimales Feedback F nicht existieren muss, wenn es unbeobachtbare Eigenwerte von A auf der imaginären Achse gibt.

Beispiel 6.4 *Betrachte ein System Σ , das gegeben ist durch*

$$\dot{x}(t) = u(t) + d(t), z(t) = u(t).$$

($A = 0, B = 1, C = 0, D = 1, E = 1$) Der Eigenwert 0 ist nicht beobachtbar für (C, A) , weil $\text{Rang} \begin{bmatrix} 0I - A \\ C \end{bmatrix} = \text{Rang}[0] = 0$. Die zugehörige ARE ist skalar und

$$0 = A^\top P + PA - PBB^\top P + C^\top C = -p^2.$$

Dann ist natürlich $p^+ = 0$, also $J_\Sigma^ = E^\top p^+ E = p^+ = 0$. Für ein Feedback f und $u = fx$ ist $\dot{x}(t) = fx(t) + d(t), z(t) = fx(t)$. Daher ist*

$$T_{P^+,F}(t) = (B^\top P^+ + F)e^{A_F t} E = fe^{ft} = 0$$

nur, wenn $f = 0$. Dann ist aber $A + BF = f = 0$ nicht stabil, also gibt es kein optimales Feedback.

Wir können die Lösung dieses Problems auch folgendermaßen interpretieren: Für das System Σ_P , gegeben durch (5.4), suchen wir ein Feedback, so dass die Störung $d(\cdot)$ keinen Einfluss auf den Output hat und so dass $\sigma(A + BF) \subset \mathbb{C}_-$. Wir haben also ein Störungsentkopplungsproblem mit Stabilität (DDPS), wobei jetzt allerdings der Output auch direkt vom Input u abhängt, $z = B^\top P x + u$.

Im nächsten Lemma schreiben wir mit $C := B^\top P$ den Output als

$$z = Cx + u$$

und diskutieren das zugehörige (DDPS).

Lemma 6.5 *Betrachte $\dot{x} = Ax + Bu + Ed, z = Cx + u$. Äquivalent sind:*

(i) *Das zugehörige (DDPS) ist lösbar, es gibt also ein Feedback F mit*

$$\sigma(A + BF) \subset \mathbb{C}_- \text{ und } T_F(t) = (C + F)e^{(A+BF)t}E = 0, t \geq 0;$$

(ii) *(A, B) ist stabilisierbar und $\text{Im } E \subset X^-(A - BC)$, dem stabilen Unterraum von $A - BC$.*

Beweis. Gelte (i). Dann ist offenbar (A, B) stabilisierbar. Nehmen wir für das Feedback-System $d = 0$ und $x_0 \in \text{Im } E$, so folgt $x(t) \rightarrow 0$ und $z(t) = Cx(t) + u(t) = 0, t \geq 0$. Es folgt $u(t) = -Cx(t)$. Natürlich ist auch $u(t) = BFx(t)$. Daher erfüllt $x(t)$ die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = (A - BC)x(t) \text{ mit } x(0) = x_0.$$

Weil $x(t) \rightarrow 0$ folgt, dass der Anfangswert x_0 im stabilen Unterraum von $A - BC$ liegt, also $\text{Im } E \subset X^-(A - BC)$.

Gelte (ii). Kürze ab $V := X^-(A - BC)$.

Behauptung: Es gibt ein Feedback F , so dass $\sigma(A_F) \subset \mathbb{C}_-, A_F V \subset V \subset \ker(C + F)$.

Aus der Behauptung folgt natürlich, dass (i) gilt. Zum Beweis der Behauptung setze eine Basis von V zu einer Basis von \mathbb{R}^n fort. Dann

$$A - BC = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix},$$

mit $\sigma(A_{11}) \subset \mathbb{C}_-$ and (A_{22}, B_2) ist stabilisierbar, weil (A, B) stabilisierbar ist. Sei F_2 so, dass $\sigma(A_{22} + B_2 F_2) \subset \mathbb{C}_-$ und definiere $F_0 := [0, F_2]$. Dann

$$A - BC + BF_0 = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} + B_2 F_2 \end{bmatrix}.$$

Schließlich sei $F := F_0 - C$. Dann ist $\sigma(A + BF) \subset \mathbb{C}_-$ und V ist ein A_F -invarianter Unterraum mit

$$V \subset \ker(C + F).$$

■

Anwendung dieses Lemmas auf das H_2 -Problem liefert das folgende Resultat.

Theorem 6.6 Betrachte das System Σ gegeben durch (6.1). Es gelte $D^\top C = 0$, $D^\top D = I$, und (A, B) sei stabilisierbar. Ferner sei jeder Eigenwert von A auf der imaginären Achse (C, A) -beobachtbar und P^+ bezeichne die größte positiv definite Lösung der ARE (6.3). Dann ist $J_\Sigma^* = \text{Spur}(E^\top P^+ E)$ und es gilt:

(i) Es gibt ein optimales Feedback F , also $\sigma(A + BF) \subset \mathbb{C}_-$ und $J_\Sigma(F) = J_\Sigma^*$.

(ii) Es gibt F so das für $u(t) = Fx(t)$ Störungsentkopplung mit Stabilität für das System Σ_{P^+} gegeben durch (6.6) gilt, also $\sigma(A + BF) \subset \mathbb{C}_-$ und $(B^\top P^+ + F)e^{(A+BF)t}E = 0, t \geq 0$.

(iii) $\text{Im } E \subset X^-(A - BB^\top P^+)$.

Ferner ist F optimal genau dann, wenn

$$\sigma(A + BF) \subset \mathbb{C}_- \text{ und } (B^\top P^+ + F)e^{(A+BF)t}E = 0, t \geq 0.$$

6.2 Schlussbemerkungen

Das Problem der H_2 -optimalen Steuerung hat seine Wurzeln in dem klassischen Linear-Quadratischen Gauß- (LQG)-Regelungsproblem. Dabei soll für additives (stochastisches) weißes Rauschen $v(\cdot)$ der Erwartungswert des Quadrats des Outputs minimiert werden, also für die stochastische Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = (A + BF)x(t) + E dW(t), \quad z(t) = Cx(t),$$

soll für $t \geq 0$ der Erwartungswert

$$\mathbb{E}(\|z(t)\|^2)$$

minimiert werden. Es stellt sich heraus, dass dies unabhängig von t ist und

$$\mathbb{E}(\|z(t)\|^2) = \int_0^\infty T_F(t)^\top T_F(t) dt$$

wobei $T_F(t) = Ce^{(A+BF)t}E, t \geq 0$. Dies stimmt also mit dem H_2 -optimalen Problem überein.

Kapitel 7

Das H_∞ -Kontrollproblem

Das H_∞ -Kontrollproblem betrachtet Systeme der folgenden Form:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu + Ed, \\ z &= Cx + Du\end{aligned}$$

wobei $x \in \mathbb{R}^n$ der Zustand, $u \in \mathbb{R}^m$ der Kontrollinput, $d \in \mathbb{R}^\ell$ die Störung und $z \in \mathbb{R}^q$ der zu kontrollierende Output sind.

Wir wollen die Auswirkung der Störung d auf den Output z durch Wahl von u minimieren, also einen Regler in Form eines Feedbacks $u = Fx$. Wir betrachten wieder die Transfer-Matrix von den Störungen zum Output. Wie bei der H_2 -Theorie beachten wir, dass die Lösungen gegeben sind durch

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds + \int_0^t e^{A(t-s)}Ed(s)ds$$

Für ein Feedback $u = Fx$ erhält man

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A + BF)x(t) + Ed(t), \\ z(t) &= (C + DF)x(t),\end{aligned}$$

also mit $C_F := C + DF$, $A_F := A + BF$

$$\begin{aligned}z(t) &= (C + DF) \left[e^{(A+BF)t}x_0 + \int_0^t e^{(A+BF)(t-s)}Ed(s)ds \right] \\ &= C_F e^{A_F t}x_0 + \int_0^t C_F e^{A_F(t-s)}Ed(s)ds.\end{aligned}$$

Die Transfer-Funktion von den Störungen $d(\cdot)$ zum Output $z(\cdot)$ ist

$$T_F(t) = C_F e^{A_F t} E, t \geq 0.$$

In der H_∞ -Theorie betrachtet man Störungen, die endliche L^2 -Norm auf $[0, \infty)$ haben, also

$$\|d\|_2 = \left[\int_0^\infty \|d(t)\|^2 dt \right]^{1/2} < \infty.$$

Insbesondere gilt dann $d(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$. Der zugehörige Raum $L^2([0, \infty), \mathbb{R}^\ell)$ ist ein Hilbertraum, also insbesondere ein Banachraum. Der zugehörige Output (für den Anfangszustand $x_0 = 0$) ist gegeben durch

$$z(t) = \int_0^t C_F e^{A_F(t-s)} E d(s) ds, t \geq 0.$$

Wir möchten, dass für eine solche Störung $d \in L^2([0, \infty), \mathbb{R}^\ell)$ auch der Output in $L^2([0, \infty), \mathbb{R}^q)$ liegt. Im folgenden Lemma nehmen wir an, dass die Matrix A stabil ist (das Lemma wird dann auf ein stabiles A_F angewendet)

Lemma 7.1 *Ist A stabil, so ist für jedes $d \in L^2([0, \infty), \mathbb{R}^\ell)$*

$$\|z\|_2 = \left[\int_0^\infty \left\| \int_0^t C e^{A(t-s)} E d(s) ds \right\|^2 dt \right]^{1/2} \leq \text{Konstante} \cdot \|d\|_2 < \infty,$$

insbesondere ist also $z \in L^2([0, \infty), \mathbb{R}^q)$

Beweis. Weil A stabil ist, gibt es $\alpha, \beta > 0$ mit

$$\|e^{At}x\| \leq \beta e^{-\alpha t} \|x\|, t \geq 0.$$

Mit Jensens Ungleichung (das Quadrat ist konvex) ist dann

$$\begin{aligned} \|z\|_2^2 &= \int_0^\infty \left\| \int_0^t C e^{A(t-s)} E d(s) ds \right\|^2 dt \leq \int_0^\infty \int_0^t \|C e^{A(t-s)} E d(s)\|^2 ds dt \\ &\leq \|C\|^2 \|E\|^2 \beta^2 \int_0^\infty \int_0^t e^{-2\alpha(t-s)} \|d(s)\|^2 ds dt. \end{aligned}$$

Dies können wir mit dem Satz von Fubini weiter abschätzen durch

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^t e^{-2\alpha(t-s)} \|d(s)\|^2 ds dt &= \int_0^\infty \int_s^\infty e^{-2\alpha(t-s)} \|d(s)\|^2 dt ds \\ &= \int_0^\infty \int_s^\infty e^{-2\alpha t} dt e^{2\alpha s} \|d(s)\|^2 ds \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{2\alpha} e^{-2\alpha s} e^{2\alpha s} \|d(s)\|^2 ds \\ &= \frac{1}{2\alpha} \int_0^\infty \|d(s)\|^2 ds < \infty. \end{aligned}$$

■

Als Folgerung erhalten wir, dass für ein stabilisierendes Feedback F die Abbildung

$$G_F : L^2([0, \infty), \mathbb{R}^\ell) \rightarrow L^2([0, \infty), \mathbb{R}^q), d(\cdot) \mapsto z(\cdot) = \int_0^\cdot C e^{A_F(t-s)} E d(s) ds$$

wohldefiniert ist; sie ist linear und beschränkt, also stetig. Die induzierte Operatornorm ist

$$\|G_F\|_\infty := \sup \left\{ \frac{\|G_F d\|_2}{\|d\|_2} \mid 0 \neq d \in L^2([0, \infty), \mathbb{R}^\ell) \right\} < \infty.$$

Das Ziel der H_∞ -Theorie ist, durch Wahl von F die Norm von G_F zu minimieren bzw. unter einer Grenze γ zu halten. Eine leichte Umformung liefert

$$\|z\|_2 \leq \|G_F\|_\infty \|d\|_2$$

Dann ist

$$\inf_F \{ \|G_F\| \mid A + BF \text{ ist stabil} \}$$

das Infimum der Konstanten γ , für die ein stabilisierendes Feedback F existiert, so dass für alle Störungen d gilt

$$\|z\|_2 \leq \gamma \|d\|_2.$$

Die H_∞ -Theorie hat enge Verbindungen zur Spieltheorie. Dies kann man folgendermaßen sehen:

Betrachte für gegebenes $\gamma > 0$ das Problem

$$\sup_{d \in L^2} \left\{ \|z\|_2^2 - \gamma^2 \|d\|_2^2 \mid x(0) = 0 \right\}. \quad (7.1)$$

Dieser Ausdruck nur dann endlich, wenn die H_∞ -Norm des Systems kleiner oder gleich γ ist. In der Tat, ist die H_∞ -Norm größer als γ , so existiert ein Signal $d \in L^2$, so dass

$$\frac{\|z\|_2}{\|d\|_2} > \gamma.$$

Quadrieren und Multiplikation mit $\|d\|_2^2$ liefert

$$\|z\|_2^2 - \gamma^2 \|d\|_2^2 =: r > 0.$$

Ersetzen wir d durch αd , so wird der Output gleich αz , weil der Anfangswert gleich 0 ist. Die zugehörigen „Kosten“ $\|z\|_2^2 - \gamma^2 \|d\|_2^2$ sind gleich $\alpha^2 r$. Wegen $r > 0$ können wir dies Funktional beliebig groß machen, das Supremum wird daher nicht endlich.

Die Beziehung zur Spieltheorie wird deutlich, wenn wir nach Inputs u suchen, so dass (für festes γ) das Supremum in (7.1) minimiert wird: Die Inputs repräsentieren einen Spieler, der den Aktionen des anderen Spielers d entgegenwirken will.

Dies Problem hat große Ähnlichkeit mit dem linear-quadratischen Problem (es ist ein indefiniter Fall dieses Problems). Wir betrachten

$$\|z\|_2^2 - \gamma^2 \|d\|_2^2 = \int_0^\infty [x(t)^\top C^\top C x(t) - \gamma^2 d(t)^\top d(t)] dt$$

Wie beim linear-quadratischen Problem werden wir zunächst endliche Zeitintervalle betrachten und danach das Problem mit unendlichem Horizont.

Dabei werden wir wieder Riccati-Gleichungen verwenden. Algebraische Riccati-Gleichungen haben die Form

$$A^\top P + PA + PRP + Q = 0.$$

In der linear-quadratischen Theorie und der H_2 -Theorie haben wir $R = -BB^\top \leq 0$ und $Q \geq 0$. In der Riccati-Gleichung, die in der H_∞ -Theorie auftritt, ist der quadratische Term indefinit. Solche Riccati-Gleichungen sind zuerst in der Spieltheorie verwandt worden.

Bemerkung 7.2 Die Bezeichnung „ H_∞ -Norm“ für die induzierte Matrix-Norm

$$\|G_F\|_\infty := \sup \left\{ \frac{\|G_F d\|_2}{\|d\|_2} \mid 0 \neq d \in L^2([0, \infty), \mathbb{R}^\ell) \right\}$$

erklärt sich aus der Tatsache, dass sie mit der Norm auf dem Hardy-Raum H_∞ übereinstimmt: Sei für stabiles A

$$G(s) := C(sI - A)^{-1}E$$

und

$$\|G\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \|G(i\omega)\|$$

wobei $\|M\|$ den größten Singulärwert von M bezeichnet (also σ_1 , wobei σ_1^2 den größte Eigenwert von $M^\top M$ bezeichnet). Dann ist H_∞ ein Raum von Matrixwertigen Funktionen G auf der rechten Halbebene in \mathbb{C} mit $\|G\|_\infty < \infty$ (holomorph auf der offenen rechten Halbebene).

7.1 Das Problem auf endlichem Zeitintervall

Wir betrachten Systeme der Form

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + Ed, \\ z &= Cx + Du, \end{aligned} \tag{7.2}$$

und zeitabhängige Feedbacks $u(t) = F(t)x(t)$, so dass die induzierte Operatornorm der Abbildung von den Störungen auf den Output minimiert wird. Sei dazu für $T > 0$

$$\|d\|_{2,T} := \left[\int_0^T \|d(t)\|^2 dt \right]^{1/2}$$

und für das Feedback System mit Anfangszustand $x(0) = 0$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + BF(t))x + Ed, \\ z &= Cx + Du \end{aligned}$$

ist mit $z = G_F d$

$$\|z\|_{2,T} = \|G_F d\|_{2,T} := \left[\int_0^T \|z(t)\|^2 dt \right]^{1/2}.$$

Die induzierte Operatornorm ist

$$\|G_F\|_{\infty,T} := \sup \left\{ \frac{\|G_F d\|_{2,T}}{\|d\|_{2,T}} \mid 0 \neq d \in L^2([0, T], \mathbb{R}^\ell) \right\} < \infty.$$

Wir zeigen zunächst ein einfaches Lemma.

Lemma 7.3 Es ist

$$\sup_{d \in L^2} \left\{ \|z\|_{2,T} - \gamma^2 \|d\|_{2,T} \mid x(0) = \xi \right\}$$

ist für jedes $\xi \in \mathbb{R}^n$ endlich, wenn die induzierte L^2 -Operatornorm kleiner als γ ist.

Beweis. Die induzierte L^2 -Operatornorm sei kleiner als γ , etwa gleich $\delta < \gamma$. Sei $z_{0,d}$ der Output mit Störung d und Anfangswert 0 und $z_{\xi,0}$ der Output mit Störung 0 und $x(0) = \xi$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \|z\|_{2,T} - \gamma^2 \|d\|_{2,T} &= \|z_{0,d} + z_{\xi,0}\|_{2,T}^2 - \gamma^2 \|d\|_{2,T}^2 \\ &\leq \|z_{0,d}\|_{2,T}^2 + \|z_{\xi,0}\|_{2,T}^2 + 2 \|z_{0,d}\|_{2,T} \|z_{\xi,0}\|_{2,T} - \gamma^2 \|d\|_{2,T}^2 \\ &\leq (\delta^2 - \gamma^2) \|d\|_{2,T}^2 + 2 \|z_{\xi,0}\|_{2,T} \|d\|_{2,T} + \|z_{\xi,0}\|_{2,T}^2 \\ &\leq \sup_{\alpha \in [0, \infty)} \left[(\delta^2 - \gamma^2) \alpha^2 + 2 \|z_{\xi,0}\|_{2,T} \alpha + \|z_{\xi,0}\|_{2,T}^2 \right] \\ &< \infty. \end{aligned}$$

■

Das folgende Theorem gibt notwendige und hinreichende Bedingungen, unter denen ein Feedback gefunden werden kann, so dass diese Norm unter einer vorgegebenen Konstante γ bleibt.

Theorem 7.4 *Betrachte ein System der Form (7.2). Es sei $T > 0$ und $\gamma > 0$. Die Matrix D sei injektiv. Dann sind äquivalent:*

- (i) *Es gibt ein Feedback $u(t) = F(t)x(t)$ so dass $\|G_F\|_{\infty, T} < \gamma$.*
- (ii) *Es gibt eine differenzierbare Abbildung $P : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, so dass $P(t) \geq 0, t \in [0, T]$, die Lösung der folgenden Riccati-Differentialgleichung mit $P(T) = 0$ ist,*

$$-\dot{P} = A^\top P + PA + C^\top C + \gamma^{-2} P E E^\top P - (PB + C^\top D)(D^\top D)^{-1}(B^\top P + D^\top C). \quad (7.3)$$

Erfüllt P die Bedingungen in (ii), so erfüllt

$$F(t) := -(D^\top D)^{-1}(B^\top P + D^\top C) \quad (7.4)$$

die Bedingung in (i).

Beweis. Sei $0 \leq \tau \leq T$ und

$$\mathcal{C}(u, d, \xi, \tau) := \int_\tau^T [z(t)^\top z(t) - \gamma^2 d(t)^\top d(t)] dt,$$

wobei z der Output des Systems mit Inputs u, d und Anfangsbedingung $x(\tau) = \xi$ ist. Wir diskutieren das folgende Kriterium

$$\mathcal{C}^*(\xi, \tau) := \sup_d \inf_u \mathcal{C}(u, d, \xi, \tau)$$

mit Anfangszustand $x(\tau) = \xi$. Hier ist $d \in L^2[0, T]$ und $u \in L^2[0, T]$. Beachte, dass wir für festes d über u minimieren. Daher ist es egal, ob wir über zeitabhängige Inputs u oder Feedbacks optimieren. Andererseits ist d jedenfalls zeithängig.

Wir zeigen zunächst, dass (ii) aus (i) folgt. Wir können Lemma 7.3 anwenden, nachdem wir nach (i) ein Feedback $u(t) = F(t)x(t)$ gewählt haben, das L^2 -Operatornorm kleiner als γ liefert. Dies ergibt für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\sup_{d \in L^2} \left\{ \|z\|_{2,T}^2 - \gamma^2 \|d\|_{2,T}^2 \mid u(t) = F(t)x(t) \text{ und } x(0) = \xi \right\} < \infty. \quad (7.5)$$

Offenbar ist der Ausdruck in (7.5) größer oder gleich $\mathcal{C}^*(\xi, 0)$. Dies ist also auch von oben beschränkt. Wählt man $d = 0$, so sieht man $\mathcal{C}^*(\xi, 0) \geq 0$.

Behauptung: $\mathcal{C}^*(\xi, \tau)$ ist fallend in τ .

Dies folgt, weil für $\tau_1 \geq \tau_2$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^*(\xi, \tau_1) &:= \sup_d \inf_u \mathcal{C}(u, d, \xi, \tau_1) \\ &= \sup_d \inf_u \int_{\tau_1}^T \left[\|z(t)\|^2 - \gamma^2 \|d(t)\|^2 \right] dt \\ &\geq \sup_d \inf_u \left\{ \int_{\tau_1}^T \left[\|z(t)\|^2 - \gamma^2 \|d(t)\|^2 \right] dt \mid d(t) = 0 \text{ für } t \geq T - \tau_2 + \tau_1 \right\} \\ &\geq \sup_d \inf_u \int_{\tau_1}^{T - \tau_2 + \tau_1} \left[\|z(t)\|^2 - \gamma^2 \|d(t)\|^2 \right] dt \\ &= \sup_d \inf_u \int_{\tau_2}^T \left[\|z(t)\|^2 - \gamma^2 \|d(t)\|^2 \right] dt \\ &= \mathcal{C}^*(\xi, \tau_2). \end{aligned}$$

Hier haben wir die Zeit-Invarianz der (open-loop) Gleichung benutzt.

Daher ist $\mathcal{C}^*(\xi, \tau)$ für alle $\tau \in [0, T]$ beschränkt. Wir benutzen jetzt Theorem 5.2, das die Existenz der Lösung der Riccati-Gleichung (7.3) auf einem kleinen Intervall liefert. Das folgende Lemma (siehe Trentelman, Stoorvogel, Hautus [16, Lemma 13.2]), das wir nicht beweisen werden, zeigt, dass diese Lösung beschränkt bleibt und daher auf dem ganzen Intervall $[0, T]$ existiert.

Lemma 7.5 *Die Riccati-Gleichung (7.3) habe eine Lösung $P(t)$ auf dem Intervall $[T_1, T]$ mit $T_1 < T$. Dann gilt für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ und alle $\tau \in [T_1, T]$*

$$\mathcal{C}^*(\xi, \tau) = \xi^\top P(\tau) \xi.$$

■

Beweis. Aus diesem Lemma folgt die Beschränktheit von $P(t)$, also die Existenz der Lösung auf $[0, T]$.

Es bleibt zu zeigen, dass (i) aus (ii) folgt. Dazu ist zu zeigen, dass das Feedback (7.4) die Bedingung in (i) erfüllt. Mit Vervollständigung von Quadraten erhält man für Anfangswert $\xi = 0$ und Anfangszeit $\tau = 0$, also $\xi^\top P(\tau) \xi = 0$,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(u, d, 0, 0) &= \int_0^T \left[\|z(t)\|^2 - \gamma^2 \|d(t)\|^2 + \frac{d}{dt} (x(t)^\top P(t) x(t)) \right] dt \\ &= \int_\tau^T \left[\|D[u(t) - F(t)x(t)]\|^2 - \gamma^2 \|d(t) - F_2(t)x(t)\|^2 \right] dt \\ &= - \int_\tau^T \gamma^2 \|d(t) - F_2(t)x(t)\|^2 dt, \end{aligned}$$

mit $F = -(D^\top D)^{-1}(B^\top P + D^\top C)$ und $F_2 = \gamma^{-2} E^\top P$. Mit $u = Fx$ also für alle $d \in L^2$

$$\mathcal{C}(u, d, 0, 0) = \int_0^T \left[\|z(t)\|^2 - \gamma^2 \|d(t)\|^2 \right] dt = - \int_\tau^T \gamma^2 \|d(t) - F_2(t)x(t)\|^2 dt \leq 0.$$

Daher ist die induzierte L^2 -Operatornorm kleiner oder gleich γ .

Man kann auch zeigen, dass sie echt kleiner als γ ist, siehe [16, Theorem 13.1]. ■

7.2 Das Problem mit Unendlichem Horizont

In Analogie zum Vorgehen für das linear-quadratische Problem werden wir jetzt vom Problem auf endlichem Zeitintervall zum Problem auf unendlichem Zeitintervall übergehen.

Die folgenden Begriffe werden in der Formulierung des Hauptresultats benötigt. Eine Matrix $P(s)$, deren Einträge Polynome sind, heißt *polynomiale Matrix*. Elementare Zeilen-Operationen sind Vertauschung von zwei Zeilen, Addition einer Zeile multipliziert mit einem Polynom zu einer anderen Zeile, und Multiplikation einer Zeile mit einer Konstanten; analog sind elementare Spalten-Transformationen definiert. Jede Polynommatrix kann durch elementare Zeilen- und Spalten-Transformationen auf die sogenannte Smith-Normalform gebracht werden,

$$\bar{P}(s) = \text{diag}_{m \times n}[\psi_1(s), \dots, \psi_r(s), 0, \dots, 0],$$

wobei die $\psi_i(s)$ Monome sind, so dass für alle i das Polynom ψ_i das Polynom ψ_{i+1} teilt. Die Polynome ψ_1, \dots, ψ_r heißen *nichttriviale invariante Faktoren* der Polynommatrix $P(s)$.

Für das System (7.2) betrachte die $(n+p) \times (n+m)$ -Polynommatrix

$$\begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & D \end{bmatrix}.$$

Die Nullstellen der nichttrivialen invarianten Faktoren heißen die *Nullstellen des Systems*. Ihre Bedeutung liegt darin, dass eine Nullstelle einen nichttrivialen Input liefert, der sich nicht auf den Output auswirkt.

Proposition 7.6 Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ und es seien $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $u_0 \in \mathbb{R}^m$, so dass

$$\begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ u_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Definiere $u(t) = e^{\lambda t} u_0, t \geq 0$. Dann ist der Output zum Anfangswert x_0 und zur Kontrolle $u(\cdot)$ gleich 0, d.h., $z(t) = Cx(t) + Du(t) = 0, t \geq 0$.

Beweis. Die Funktion $x(t) := e^{\lambda t} x_0, t \geq 0$ erfüllt $x(0) = x_0, \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, weil

$$\dot{x}(t) - Ax(t) - Bu(t) = \lambda e^{\lambda t} x_0 - A e^{\lambda t} x_0 - B e^{\lambda t} u_0 = e^{\lambda t} [(\lambda I - A)x_0 - Bu_0] = 0$$

$$\text{und } z(t) = Cx(t) + Du(t) = e^{\lambda t} [Cx_0 + Du_0] = 0. \blacksquare$$

Das folgende Theorem ist die Hauptaussage zur H_∞ -optimalen Steuerung mit Zustandsfeedback.

Theorem 7.7 Betrachte das System (7.2) und wähle eine Konstante $\gamma > 0$. Das System (A, B, C, D) habe keine Nullstellen auf der imaginären Achse und die Matrix D sei injektiv. Dann sind äquivalent:

(i) Es gibt ein Zustands-Feedback $u(t) = Fx(t)$, so dass für die Feedback-Transfer-Matrix $\|G_F\| < \gamma$ gilt.

(ii) Es gibt $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so dass $P \geq 0$ und P die ARE

$$0 = A^\top P + PA + C^\top C + \gamma^{-2} PEE^\top P - (PB + C^\top D)(D^\top D)^{-1}(B^\top P + D^\top C) \quad (7.6)$$

löst, und die Matrix A_{cl} ist stabil,

$$A_{cl} := A + \gamma^{-2}EE^\top P - B(D^\top D)^{-1}(B^\top P + D^\top C). \quad (7.7)$$

Erfüllt P die Bedingungen in (ii), so gelten die Bedingungen in (i) für

$$F := -(D^\top D)^{-1}(B^\top P + D^\top C). \quad (7.8)$$

Bemerkung 7.8 In (ii) wird die Stabilität der Matrix A_{cl} gefordert. Um zu zeigen, dass (i) gilt, werden wir $P \geq 0$ benutzen, um die Stabilität von $A + BF$ nachzuweisen. Ferner sieht man

$$A_{cl} := A + BF + \gamma^{-2}EE^\top P. \quad (7.9)$$

Für den **Beweis von Theorem 7.7** skizzieren wir zunächst den Beweis, dass (ii) aus (i) folgt. Dabei können wir nicht direkt das Resultat auf endlichem Zeitintervall benutzen, sondern müssen noch einen Endpunkt-Strafterm einfügen.

Eine Verschärfung der Resultate im linear-quadratischen Fall (siehe Trentelman, Stoorvogel and Hautus [16, Section 10.5]) zeigt, dass es eine symmetrische Lösung L der ARE

$$A^\top L + LA + C^\top C - (LB + C^\top D)(D^\top D)^{-1}(LB + C^\top D)^\top = 0 \quad (7.10)$$

gibt, so dass

$$A - B(D^\top D)^{-1}(LB + C^\top D)$$

stabil ist. Definiere

$$\mathcal{C}_L(u, d, \xi, T) := \int_0^T [z(t)^\top z(t) - \gamma^2 d(t)] dt + x(T)^\top Lx(T),$$

wobei z der Output zu den Inputs u, d und Anfangsbedingung $x(\tau) = \xi$ ist. Betrachte dann das Kriterium

$$\mathcal{C}_L^*(\xi, T) := \sup_d \inf_u \mathcal{C}_L(u, d, \xi, T).$$

Die Idee für den Strafterm $x(T)^\top Lx(T)$ ist, dass nach der Zeit T die Störung $d \in L^2[0, \infty)$ klein ist und daher $d(t) = 0$ eine gute Approximation ist. Der Wert des Optimierungsproblems auf $[T, \infty)$ ist dann $x(T)^\top Lx(T)$, und man kann dies als Näherung für den optimalen Term $\int_T^\infty [z(t)^\top z(t) - \gamma^2 d(t)] dt$ nehmen.

Man kann dann zeigen, dass die Lösung der Riccati-Differentialgleichung mit $P(0) = L$

$$\dot{P} = A^\top P + PA + C^\top C + \gamma^{-2}PEE^\top P - (PB + C^\top D)(D^\top D)^{-1}(B^\top P + D^\top C)$$

auf $[0, \infty)$ existiert und dass $P(t)$ wachsend in t und beschränkt ist. Es folgt, dass $P(t) \rightarrow \bar{P}$ für $t \rightarrow \infty$, wobei \bar{P} eine Lösung der ARE (7.6) ist. Dann muss noch gezeigt werden, dass die Matrix A_{cl} in (7.7) stabil ist und die Bedingungen in (ii) sind erfüllt.

Für den Beweis, dass (i) aus (ii) folgt, ist zu zeigen, dass das Feedback F aus (7.8) die Bedingung in (i) erfüllt. Wir zeigen, dass das Feedback stabilisierend ist. Mit $F = -(D^\top D)^{-1}(B^\top P + D^\top C)$ gilt

$$\begin{aligned} & (C + DF)^\top (C + DF) \\ &= C^\top C + C^\top DF + F^\top D^\top C - F^\top D^\top D (D^\top D)^{-1} (B^\top P + D^\top C) \\ &= C^\top C + C^\top DF + F^\top D^\top C - F^\top (B^\top P + D^\top C) \\ &= C^\top C + C^\top DF - F^\top B^\top P. \end{aligned}$$

Also ist die ARE (7.6) äquivalent zu

$$\begin{aligned} 0 &= (A + BF)^\top P + P(A + BF) + (C + DF)^\top (C + DF) + \gamma^{-2} PEE^\top P \\ &= A^\top P + PA + F^\top B^\top P + PBF + C^\top C + C^\top DF - F^\top B^\top P + \gamma^{-2} PEE^\top P \\ &= A^\top P + PA + C^\top C + PBF + C^\top DF + \gamma^{-2} PEE^\top P \\ &= A^\top P + PA + C^\top C + (PB + C^\top D)F + \gamma^{-2} PEE^\top P. \end{aligned}$$

Ist daher x ein Eigenvektor von $A + BF$ zum Eigenwert λ , so folgt

$$2(\operatorname{Re} \lambda) x^* P x = -\gamma^{-2} \|E^\top P x\|^2 - \|(C + DF)x\|^2.$$

Wir sehen, dass aus $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ folgt $\|E^\top P x\| = 0$ und dann mit (7.9)

$$(A + BF + \gamma^{-2} EE^\top P)x = \lambda x.$$

Diese Matrix ist nach Annahme stabil und wir erhalten den Widerspruch $\operatorname{Re} \lambda < 0$. Wir folgern, dass $A + BF$ stabil ist.

Schließlich kann man mit einer Vervollständigung von Quadraten zeigen, dass für Anfangszustand 0 und $u = Fx$ und alle $d \in L^2$

$$\int_0^\infty \left[\|z(t)\|^2 - \gamma^2 \|d(t)\|^2 \right] dt = - \int_0^\infty \gamma^2 \|d(t) - F_2(t)x(t)\|^2 dt \leq 0.$$

Daher ist die H_∞ -Norm kleiner gleich γ (man kann auch zeigen, dass sie echt kleiner als γ ist). Das Feedback $u = Fx$ erfüllt damit die Bedingungen in (i).

Literaturverzeichnis

- [1] H. AMANN, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, De Gruyter, Berlin, New York, 1995. 2. Auflage.
- [2] B. AULBACH, *Gewöhnliche Differenzialgleichungen*, Spektrum Akademischer Verlag, 2004. Zweite Auflage.
- [3] G. BASILE AND G. MARRO, *Controlled and Conditioned Invariant Subspaces*, Prentice Hall, 1992.
- [4] G. BASILE AND G. MORRO, *Controlled and conditioned invariant subspaces in linear system theory*, J. Optim. Theory Appl., 3 (1969), pp. 306–315.
- [5] L. GRÜNE AND O. JUNGE, *Gewöhnliche Differentialgleichungen. Eine Einführung aus der Perspektive der dynamischen Systeme*, Vieweg und Teubner, 2009.
- [6] W. HAHN, *Stability of Motion*, Springer-Verlag, 1967.
- [7] M. HEHN AND R. D’ANDREA, *A flying inverted pendulum*, in IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2011. Preprint, Institut für Dynamic Systems and Control, ETH Zürich.
- [8] D. HINRICHSSEN AND A. PRITCHARD, *Mathematical Systems Theory*, Springer-Verlag, 2005.
- [9] A. ISIDORI, *Nonlinear Control Systems*, Springer-Verlag, 1998.
- [10] V. JURDJEVIC, *Geometric Control Theory*, Cambridge University Press, 1997.
- [11] H. KNOBLOCH AND H. KWAKERNAAK, *Lineare Kontrolltheorie*, Springer-Verlag, 1985.
- [12] H. NIJMEIJER AND A. J. VAN DER SCHAFT, *Nonlinear Dynamical Control Systems*, Springer-Verlag, 1990.
- [13] S. SASTRY, *Nonlinear Systems. Analysis, Stability, and Control*, Springer-Verlag, 1999.
- [14] E. D. SONTAG, *Mathematical Control Theory*, Springer-Verlag, 1990.
- [15] ———, *Mathematical Control Theory*, Springer-Verlag, 1998. Second Edition (First Edition, 1990).

- [16] H. L. TRENTMANN, A. A. STORVOGEL, AND M. HAUTUS, *Control Theory for Linear Systems*, Springer-Verlag, London, 2001.
- [17] W. WALTER, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Springer Verlag, 2000.
- [18] W. WONHAM, *Linear Multivariable Control: A Geometric Approach*, Springer Verlag, 1985.